Suites numériques

▶ Autour de la convergence

1. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$
   (b) $x_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$
   (c) $v_n = \dfrac{n^2+7}{n^3+n^4}$
   (d) $y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
   (e) $w_n = \lfloor e^n \rfloor$
   (f) $z_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$
2. Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}$.
3. Montrer que les suites définies par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$
pour $n \geq 1$ sont adjacentes.
4. Étudier la convergence de la suite de terme général
$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^{1/n^3}.$$
5. Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?
6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.
7. *Suites d'entiers.*
   (a) Établir que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.
   (b) Démontrer que toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire.
8. *Moyenne arithmético–géométrique.* Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\,.$$
Démontrer que u et v convergent vers une même limite.

▶ Suites extraites

9. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})_n$ soit convergente. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
10. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge.
11. Montrer que la suite $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)_n$ est divergente.

▶ Étude de suites récurrentes

12. Déterminer le terme général des suites récurrentes suivantes et calculer leur limite éventuelle.
    (a) $u_0 = 3$, $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$;
    (b) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
13. Déterminer le terme général et la limite éventuelle de chacune des suites récurrentes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :
    (a) $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$;
    (b) $v_0 = 1$, $v_1 = 9$ et $v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{1}{4}v_n$;
    (c) $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} - \dfrac{i}{4}w_n$;
    (d) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ et $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n$.

14. Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.
15. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$.
    (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
    (b) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

▶ Considérations topologiques

16. Démontrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
17. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $+\infty$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.
18. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (on dit que a est *adhérent* à $I \setminus \{a\}$).

▶ Approfondissements

19. *Nombres harmoniques.* Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
    (a) Vérifier que la suite $(H_n)_n$ est croissante et établir qu'elle diverge vers $+\infty$.
    (b) Démontrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
20. *Moyenne de Césaro.* Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\ .$$

21. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0, u_1 \in]\,0, 1[$ fixés et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]\,0, 1[$.
    (b) On pose $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante.
    (c) Montrer que $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la convergence et la limite de $(u_n)_n$.
22. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres réels et p et q deux entiers naturels impairs tels que $(u_n + v_n)_n$ et $(u_n^p - v_n^q)_n$ convergent vers 0. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers 0.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{43}$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de $(u_n)_n$.
   (b) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan x)$.

$\boxed{55}$ Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.