NOMBRES COMPLEXES

▶ Généralités calculatoires et géométriques

1. *Enoncé : Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :*

   (a) $(2+6i)(5+i)$;

$$\begin{aligned}(2+6i)(5+i) &= 10+2i+30i-6\\ &= \boxed{4+32i}\end{aligned}$$

   (b) $\frac{1+2i}{1+i}$;

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{1+i} &= \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \boxed{\frac{3+i}{2}}\end{aligned}$$

   (c) $(2-3i)^4$;

$$\begin{aligned}(2-3i)^4 &= \Big((2-3i)^2\Big)^2\\ &= (4-12i-9)^2\\ &= (-5-12i)^2\\ &= (5+12i)^2\\ &= (25+120i-144)\\ &= \boxed{-119+120i}\end{aligned}$$

   (d) $(2+i)^3$;

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)(2+i)^2\\ &= (2+i)(4+4i+i^2)\\ &= (2+i)(3+4i)\\ &= 6+8i+3i+4i^2\\ &= 6+11i-4\\ &= \boxed{2+11i}\end{aligned}$$

   (e) $(3-i)(4+i)$;

$$\begin{aligned}(3-i)(4+i) &= 12+3i-4i-i^2\\ &= 12-i+1\\ &= \boxed{13-i}\end{aligned}$$

(f) $\frac{1}{3-i}$;

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-i} &= \frac{1(3+i)}{(3-i)(3+i)}\\ &= \frac{3+i}{9+1}\\ &= \frac{3+i}{10}\\ &= \boxed{\frac{3}{10}+\frac{i}{10}}\end{aligned}$$

(g) $(4-3i)^2$;

$$\begin{aligned}(4-3i)^2 &= 16-24i-24i+9i^2\\ &= 16-48i-9\\ &= \boxed{7-48i}\end{aligned}$$

(h) $\frac{2-3i}{5+2i}$;

$$\begin{aligned}\frac{2-3i}{5+2i} &= \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}\\ &= \frac{10-4i-15i+6i^2}{25+4}\\ &= \frac{10-19i-6}{29}\\ &= \frac{4-19i}{29}\\ &= \boxed{\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i}\end{aligned}$$

2. *Enoncé : Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants*

(a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}}$;

$$\begin{aligned}1+e^{i\frac{\pi}{6}} &= e^{i\times 0}+e^{i\frac{\pi}{6}}\\ &= e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\\ &= e^{i\frac{\pi}{12}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}\end{aligned}$$

(b) $\frac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{\pi}{12}}}$;

On a :

$$1+e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Et :

$$1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(e^{-i\frac{\pi}{24}}-e^{i\frac{\pi}{24}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{\pi}{12}}} &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}}\\
&= i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{24}}\\
&= i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\cdot e^{i\frac{\pi}{24}}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\cdot e^{i\frac{13\pi}{24}}
\end{aligned}$$

(c) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}}$;

$$\begin{aligned}
-1-e^{i\frac{\pi}{6}} &= \left(-e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\\
&= -2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}\\
&= \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}}
\end{aligned}$$

(d) $1-e^{i\frac{\pi}{12}}$;

$$\begin{aligned}
1-e^{i\frac{\pi}{12}} &= e^{i\frac{\pi}{24}}\left(e^{-i\frac{\pi}{24}}-e^{i\frac{\pi}{24}}\right)\\
&= -2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}\\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{2}\right)}\\
&= \boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{-11\pi}{24}}}
\end{aligned}$$

(e) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}}$;

$$\begin{aligned}
1+e^{i\frac{7\pi}{6}} &= e^{i\frac{7\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{7\pi}{12}}-e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{7\pi}{12}}\\
&= 2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{7\pi}{12}}\\
&= (-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right))\cdot e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\pi\right)}\\
&= (-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right))\cdot e^{i\frac{19\pi}{12}}\\
&= \boxed{(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right))\cdot e^{-i\frac{5\pi}{12}}}
\end{aligned}$$

(f) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$;

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1 &= e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\\
&= -2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}}\\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}\\
&= \boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}}\\
&= \boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{-7\pi}{12}}}
\end{aligned}$$

(g) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$;

$$\begin{aligned}
ie^{i\frac{\pi}{3}} &= e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}\\
1 + ie^{i\frac{\pi}{3}} &= 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}}\\
&= 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}\\
&= \boxed{2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{i\frac{5\pi}{12}}}
\end{aligned}$$

(h) $\left(1 + e^{\frac{i}{6}}\right)^{27}$.

$$\begin{aligned}
1 + e^{i\frac{1}{6}} &= 2\cos\left(\frac{1}{12}\right)e^{i\frac{1}{12}}\\
\left(1 + e^{i\frac{1}{6}}\right)^{27} &= \left(2\cos\left(\frac{1}{12}\right)\right)^{27}\cdot e^{i\frac{27}{12}}\\
&= 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{1}{12}\right)e^{i\frac{9\pi}{4}}\\
&= \boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\frac{1}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}
\end{aligned}$$

3. *Enoncé : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe* $\left(\frac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10} &= \left(\frac{(1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1))(2-2i)}{8}\right)^{10}\\
&= \left(\frac{(1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1))(1-i)}{4}\right)^{10}\\
&= \left(\frac{1-\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+1)+\sqrt{3}+1}{4}\right)^{10}\\
&= \left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}\\
&= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = e^{i\frac{10\pi}{3}}\\
&= e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2
\end{aligned}$$

4. *Enoncé : Donner une description explicite de l'ensemble*

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} \backslash \{i\} \;\middle|\; \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \right\}.$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} &= \frac{a+ib+i}{a+ib-i} \\
&= \frac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)} \\
&= \frac{(a+i(b+1))(a-i(b-1))}{a^2+(b-1)^2} \\
&= \frac{a^2 - ai(b-1) + ai(b+1) + (b+1)(b-1)}{a^2+(b-1)^2} \\
&= \frac{a^2 + 2ai + b^2 - 1}{a^2+(b-1)^2} \\
&= \frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2} + \frac{2ai}{a^2+(b-1)^2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} &\iff a^2 + b^2 = 1 \\
&\iff z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}
\end{aligned}$$

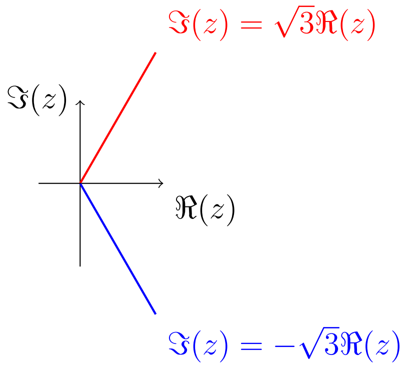
donc $E = \mathbb{U} \setminus \{i\}$

5. *Enoncé :*
   (a) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z + \bar{z} = |z|$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
z + \bar{z} &= |z| \\
2a &= |z| \quad (\Rightarrow a \geq 0) \\
2a &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
4a^2 &= a^2 + b^2 \\
b^2 &= 3a^2 \\
b &= \pm\sqrt{3}a
\end{aligned}$$

   Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \begin{array}{l} \Im(z) = \pm\sqrt{3}\Re(z) \\ \Re(z) \geq 0 \end{array} \right\}$$



(b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $|z+1| = |z|+1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

On a :

$$|z+1| = |a+1+ib| = \sqrt{(a+1)^2+b^2}$$

Et :

$$|z|+1 = \sqrt{a^2+b^2}+1$$

Donc :

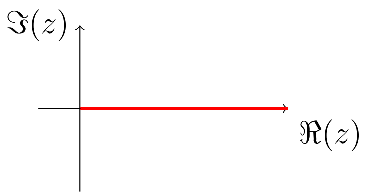
$$\begin{aligned}
\sqrt{(a+1)^2+b^2} &= \sqrt{a^2+b^2}+1 \\
(a+1)^2+b^2 &= a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+1 \\
a^2+2a+1+b^2 &= a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}+1 \\
2a &= 2\sqrt{a^2+b^2} \\
a &= \sqrt{a^2+b^2} \quad (\Rightarrow a \geq 0) \\
a^2 &= a^2+b^2 \\
b^2 &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$z = a+ib = a$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels positifs :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \begin{array}{l} \Im(z) = 0 \\ \Re(z) \geq 0 \end{array} \right\}$$



6. *Enoncé : Démontrer que les points d'affixes* $1+i$, $-(1+i)$ *et* $-4+2i$ *forment un triangle rectangle.*

Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = -1 - i \\ z_3 = -4 + 2i \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ |z_2 - z_3| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \\ |z_3 - z_1| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 &= 4 \times 2 + 9 \times 2 \\ &= 8 + 18 \\ &= 26 \\ &= |z_3 - z_1|^2 \end{aligned}$$

Donc par la réciproque du théorème de pythagore, z_1, z_2, z_3 forment un triangle rectangle en z_3.

7. *Enoncé : Déterminer les entiers $n \geq 0$ tels que $(\sqrt{3} + i)^n \in \mathbb{R}$.*
   On a :

$$\begin{aligned} |\sqrt{3} + i| &= 2 \\ \frac{\sqrt{3} + i}{|\sqrt{2} + i|} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

En passant a la puissance n :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3} + i\right)^n &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n \\ &= 2^n \left(\cos(\frac{n\pi}{6}) + i\sin(\frac{n\pi}{6})\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n \in \mathbb{R} \iff \sin(\frac{n\pi}{6}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin(\frac{n\pi}{6}) &= \sin(0) \\ \frac{n\pi}{6} &\equiv 0 \ [2\pi] \\ n &\equiv 0 \ [12] \\ n &= 12k, \ k \in \mathbb{N} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin(\frac{n\pi}{6}) &= \sin(\pi) \\ \frac{n\pi}{6} &\equiv \pi \ [2\pi] \\ n &\equiv 6 \ [12] \\ n &= 6k, \ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc : $(\sqrt{3} + i)^n$ est réel pour tout $n = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$

8. *Enoncé : Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.*
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\left(\frac{z}{z-1}\right)^4\right) \equiv 0[\pi]$$

et

$$\arg\left(\left(\frac{z}{z-1}\right)^4\right) \equiv 4\left(\arg(z) - \arg(z-1)\right)[\pi]$$

Donc on doit avoir :

$$\begin{aligned} & 4\left(\arg(z) - \arg(z-1)\right) \equiv 0[\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad & 4\left(\arg(z) - \arg(z-1)\right) = k\pi \\ & \arg(z-1) = \arg(z) - \frac{k\pi}{4} \\ & \arg(z-1) \equiv \arg(z)\left[\frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

On pose $z = a + ib$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $z \neq 1$. On a

$$\frac{z}{z-1} = \frac{a+ib}{(a-1)+ib} = \frac{(a+ib)\Big((a-1)-ib\Big)}{(a-1)^2+b^2} = \frac{a(a-1)+b^2-ib}{(a-1)^2+b^2}.$$

Ainsi

$$\arg\left(\frac{z}{z-1}\right) = \arg\Big(a(a-1)+b^2-ib\Big) = \arg\Big(A+iB\Big), \quad A = a(a-1)+b^2,\ B = -b.$$

La condition précédente devient

$$\frac{B}{A} = \tan\left(\frac{k\pi}{4}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

On distingue donc 8 cas possible en fonction de k :

k	$\tan\left(\frac{k\pi}{4}\right)$	Condition
$0,4$	0	$B = 0 \Rightarrow y = 0,\ z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$1,5$	1	$-b = A \Rightarrow a(a-1)+b^2+b = 0$
$3,7$	-1	$-b = -A \Rightarrow a(a-1)+b^2-b = 0$
$2,6$	indéfini	$A = 0 \Rightarrow a(a-1)+b^2 = 0$

Pour $k \in \{1,5\}$:

$$a(a-1)+b^2+b = 0 \iff \left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b+\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2},$$

Pour $k \in \{3,7\}$:

$$a(a-1)+b^2-b = 0 \iff \left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Pour $k \in \{2,6\}$:

$$a(a-1)+b^2 = 0 \iff b = 0,\ a(a-1) = 0 \Rightarrow (z=0) \vee (z=1),$$

En rassemblant :

$$\boxed{\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R} \iff z \in \Big(\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\Big) \cup C_+ \cup C_-}$$

avec

$$C_\pm = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; (\Re z - \tfrac{1}{2})^2 + (\Im z \mp \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2} \right\}.$$

▶ Trigonométrie et exponentielles

Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\sin^n(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n \\
&= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k (-e^{-ix})^{n-k} \\
&= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ikx}) (-1)^{n-k} (e^{-ix(n-k)}) \\
&= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{i(2k-n)x} \\
&= \left(\frac{-1}{2i}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(2k-n)x} \\
&= \frac{i^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(2k-n)x}
\end{aligned}$$

Or $\sin^n(x) \in \mathbb{R}$, donc :

$$\sin^n(x) = \Re(\sin^n(x)) = \Re\left(\frac{i^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(2k-n)x}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \Re\left(i^n e^{i(2k-n)x}\right)$$

<u>Si n est pair :</u>
Alors, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et :

$$i^n e^{i(2k-n)x} = \underbrace{i^2}_{(-1)}{}^p (\cos((2k-n)x) + i\sin((2k-n)x))$$

Donc

$$\Re\left(i^n e^{i(2k-n)x}\right) = (-1)^p \cos((2k-n)x)$$

<u>Si n est impair :</u>
Alors, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$ et :

$$\begin{aligned}
i^n e^{i(2k-n)x} &= i \times (-1)^p (\cos((2k-n)x) + i\sin((2k-n)x)) \\
&= i(-1)^p \cos((2k-n)x) + (-1)^{p+1} \times \sin((2k-n)x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\Re\left(i^n e^{i(2k-n)x}\right) = (-1)^{p+1} \sin((2k-n)x)$$

Donc :

$$sin^n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+p}\cos((2k-n)x) & \text{Si } \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p \\ \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+p+1}\sin((2k-n)x) & \text{Si } \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p+1 \end{cases}$$

Egalement :

$$\begin{aligned} \cos(x)^n &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}e^{-i(n-k)x} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x} \end{aligned}$$

Or $\cos^n(x) \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} \cos(x)^n &= \Re(\cos(x)^n) \\ &= \Re\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)x}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Re(e^{i(2k-n)x}) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x) \end{aligned}$$

9. *Enoncé : Linéariser* $\sin^5(x), \cos^2(2x)\sin^2(x)$ *et* $\cos(3x)\sin^3(2x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
   En appliquant les formules précédentes :
   On a : $5 = 2 \times 2 + 1$, donc :

$$\begin{aligned} \sin^5(x) &= \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^{k+2+1}\sin((2k-5)x) \\ &= \frac{1}{32}\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^{k+1}\sin((2k-5)x) \\ &= \frac{1}{32}\Big[-\sin(-5x)+5\sin(-3x)-10\sin(-x)+10\sin(x)-5\sin(3x)+\sin(5x)\Big] \\ &= \frac{1}{32}\Big[+\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)+10\sin(x)-5\sin(3x)+\sin(5x)\Big] \\ &= \frac{1}{32}\Big[2\sin(5x)-10\sin(3x)+20\sin(x)\Big] \\ &= \boxed{\frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{5}{16}\sin(3x)+\frac{5}{8}\sin(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= -\frac{1}{16}(e^{2ix}+e^{-2ix})^2(e^{ix}-e^{-ix})^2\\
&= -\frac{1}{16}(e^{4ix}+2+e^{-4ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})\\
&= -\frac{1}{16}\Big(e^{6ix}-2e^{4ix}+e^{2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}-2e^{-4ix}+e^{-6ix}\Big)\\
&= -\frac{1}{16}\Big(e^{6ix}+e^{-6ix}-2(e^{4ix}+e^{-4ix})+3(e^{2ix}+e^{-2ix})-4\Big)\\
&= -\frac{1}{8}\Big(\cos(6x)-2\cos(4x)+3\cos(2x)-2\Big)\\
\cos^2(2x)\sin^2(x) &= -\frac{\cos(6x)}{8}+\frac{\cos(4x)}{4}-\frac{3\cos(2x)}{8}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3\\
&= -\frac{1}{16i}(e^{3ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-e^{-2ix})^3\\
&= -\frac{1}{16i}(e^{3ix}+e^{-3ix})(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix})\\
&= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-3e^{5ix}+3e^{ix}-e^{-3ix}+e^{3ix}-3e^{-ix}+3e^{-5ix}-e^{-9ix}\right)\\
&= -\frac{1}{16i}\left((e^{9ix}-e^{-9ix})-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+(3e^{ix}-3e^{-ix})+(e^{3ix}-e^{-3ix})\right)\\
&= -\frac{1}{8}\left(\frac{\sin(9x)}{2}-\frac{3\sin(5x)}{2}+\frac{3\sin(x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{2}\right)\\
&= -\frac{\sin(9x)}{16}-\frac{3\sin(5x)}{16}+\frac{3\sin(x)}{16}+\frac{\sin(3x)}{16}
\end{aligned}$$

10. *Enoncé : En linéarisant* $\sin^4(x)$*, déterminer*

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-1)^k\cos((2k-n)x)\\
&= \frac{1}{16}\left(\cos(-4x)-4\cos(-2x)+6\cos(0)-4\cos(2x)+\cos(4x)\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6\right)\\
&= \frac{\cos(4x)}{8}-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{8} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}$$
$$\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{8} - \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}$$
$$\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{8} - \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}$$
$$\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)}{8} - \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}$$

Donc :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

11. *Enoncé : Soient $a, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$; calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(a + k\theta).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)^2 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^2} \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \cos((2j-n)k\theta) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} (2 - 2\cos(2k\theta)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) \\
&= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{2ik\theta})
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{2ik\theta} &= \frac{1 - e^{2i(n+1)\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta}(e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} \\
&= e^{in\theta} \frac{\cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}{\cos(\theta)} \cdot \cos((n+1)\theta)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{2\cos(\theta)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{i(a+k\theta)})$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+k\theta)} &= \sum_{k=0}^{n} e^{ia} e^{ik\theta} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{ia} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{ia} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta}(e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta})}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})} \\
&= e^{ia} \cdot \frac{\cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{e^{ia}(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta) = e^{ia} \cdot \frac{\cos(n\theta)\cos((n+1)\theta)}{\cos(\theta)}$$

12. *Enoncé : On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n \in \mathbb{N}$.*

   (a) *Calculer j^n et $(j^2)^n$.*

   Soit $n \geq 0$,

   On remarque que $j^n \in \{j, j^2, j^3\} = \mathbb{U}_3$ car $j \in \mathbb{U}_3$ (stable par produit).

   Donc $\exists p, q \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n = 3p+1 \\ q \in \{0,1,2\} \end{cases}$

   Pour $q = 0$:

$$j^n = j^{3p} = (j^3)^p = 1^p = 1$$
$$(j^2)^n = j^{6p} = 1$$

   Pour $q = 1$:

$$j^n = j^{3p+1} = (j^3)^p \times j = j$$
$$(j^2)^n = j^{6p} \times j^2 = j^2$$

   Pour $q = 2$:

$$j^n = j^{3p+2} = (j^3)^p \times j^2 = j^2$$
$$(j^2)^n = j^{6p} \times j^4 = j^3 \times j = j$$

   (b) *Exprimer sous la forme d'une somme la quantité* $(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.

   On a :

$$\begin{aligned}(1+1)^2 + (1+j)^n + (1+j^2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k})\end{aligned}$$

   Or :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad \text{Car} \quad \sum_{k=0}^{2} j^k = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

   Et :

$$1 + j^k + j^{2k} = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0\ [3] \quad \exists p \in \mathbb{Z}, k = 3p \\ 1 + j + j^2 = 0 & \text{si } k \equiv 1\ [3] \quad \exists p \in \mathbb{Z}, k = 3p+1 \\ 1 + j + j^2 = 0 & \text{si } k \equiv 2\ [3] \quad \exists p \in \mathbb{Z}, k = 3p+2 \end{cases}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n &= \sum_{0 \leq 3k \leq n} (3) + \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} (0) + \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2} (0) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} (3) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} (0) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2} (0) \\ &= 3 \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}\end{aligned}$$

(c) *En déduire la valeur de la somme*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}.$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} = \frac{(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}$$

13. *Enoncé : Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:*

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

On a :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (i)^{2k} \binom{n}{2k}$$

Or,

$$\begin{aligned}
(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \\
&= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} i^{2k+1} \\
&= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k + i \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k
\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
(1+i)^n &= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc par identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

14. *Enoncé : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

(a) $e^z = -7$;

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$, alors on a :

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{a+ib} \\
&= e^a e^{ib} \\
&= e^a (\cos(b) + i \sin(b)) \\
&= -7
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} e^a\cos(b) &= -7 \\ e^a\sin(b) &= 0 \end{aligned}$$

Or, $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$, donc $\sin(b) = 0$ et $\cos(b) = -1$. Donc :

$$\begin{aligned} b &\equiv \pi[2\pi] \\ b &= \pi + 2k\pi \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \\ e^a &= 7 \\ a &= \ln(7) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$z = \ln(7) + i\pi(2k+1) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

(b) $e^z = -2i$;
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$, alors on a :

$$\begin{aligned} e^z &= e^{a+ib} \\ &= e^a e^{ib} \\ &= e^a(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= -2i \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} e^a\cos(b) &= 0 \\ e^a\sin(b) &= -2 \end{aligned}$$

Or, $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$, donc $\cos(b) = 0$ et $\sin(b) = -1$ Donc :

$$\begin{aligned} b &\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ b &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \\ e^a &= 2 \\ a &= \ln(2) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$z = \ln(2) - i\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

(c) $e^z + e^{-z} = 1$;
On a donc :

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= 1 \\ e^{2z} + 1 &= e^z \\ e^{2z} - e^z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Posons $X = e^z$, alors on a :

$$X^2 - X + 1 = 0$$

Soit Δ le discriminant du polynôme, alors on a :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 \leq 0$$

Les racines sont donc complexes, et on a :

$$\begin{aligned} x_\pm &= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Donc $x_\pm = e^{\pm i\theta}$ où $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$: Or $X = e^z$, donc on a :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{3} \pm 2k\pi \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \\ z &= i\pi\left(\frac{1}{3} \pm 2k\right) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(d) $e^z + e^{-z} = 2i$.

Analyse :

Soit $z \in \mathbb{C}$, Posons $X = e^z$, alors on a :

$$X^2 - 2iX + 1 = 0$$

on a :

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= 2i \\ X + \frac{1}{X} &= 2i \\ X^2 - 2iX + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant du polynôme, alors on a :

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 - 4 = -8$$

Donc :

$$X \in \left\{\frac{2i + 2i\sqrt{2}}{2}, \frac{2i - 2i\sqrt{2}}{2}\right\} = \left\{i(1+\sqrt{2}), i(1-\sqrt{2})\right\}$$

Donc :

$$e^z = i(1+\sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad e^z = i(1-\sqrt{2})$$

Synthèse :

Si $e^z = i(1+\sqrt{2})$, alors on a :

$$\begin{aligned} e^z + \frac{1}{e^z} &= i(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{i(1+\sqrt{2})} \\ &= 2i \end{aligned}$$

Donc on a :

$$e^z + e^{-z} = 2i \iff e^z = i(1+\sqrt{2})$$

Donc :

$$e^z = (1+\sqrt{2})i \iff e^z = (1+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Et donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z = \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Egalement :

$$\begin{aligned} e^z = (1-\sqrt{2})i &\iff e^z = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff e^z(\sqrt{2}-1)e^{3i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

et donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z = \ln(1-\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

▶ Équations algébriques

15. *Enoncé : Déterminer les racines carrées des nombre complexes $\sqrt{3}+i$ et $5-12i$.*
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \sqrt{3}+i$, alors :

$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{3}+i \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc les racines carrées sont :

$$\boxed{z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a+ib$ et $z^2 = 5-12i$.
On a :

$$\begin{aligned} |z^2| &= |5-12i| \\ &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+ib)^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab \leq -12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 9 \\ ab = -6 \\ b^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 3 \\ ab = -6 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

On remarque que ab sont de signes opposés, donc on a :

$$z = \pm(3 - 2i)$$

16. *Enoncé : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

(a) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$;

Posons Δ le discriminant du polynôme en z, alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (5 - 2i)^2 - 4(5 - 5i) \\ &= 25 - 20i + 4i^2 - 20 + 20i \\ &= 25 - 20 + 4(-1) \\ &= 5 - 4 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Donc les racines sont réelles et distinctes, et on a :

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(5 - 2i) \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{-5 + 2i \pm 1}{2} \\ &= \frac{-4 + 2i}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{-6 + 2i}{2} \\ &= -2 + i \quad \text{ou} \quad -3 + i \end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = -2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -3 + i}$$

(b) $z^2 - (9 - 2i)z + 26 = 0$;

Posons Δ le discriminant du polynôme en z, alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (9 - 2i)^2 - 4(26) \\ &= 81 - 36i + 4(-1) - 104 \\ &= -27 - 36i \\ &= -9(3 + 4i) \end{aligned}$$

Soit $w \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$ tel que $w^2 = -9(3 + 4i)$, alors on a :

$$a^2 - b^2 + 2iab = (-9)(3 + 4i) = -27 - 36i$$

et :

$$\begin{aligned}|w^2| &= |-9(3+4i)| \\ &= 9|3+4i| \\ &= 9\sqrt{3^2+4^2} \\ &= 9\sqrt{9+16} \\ &= 9\sqrt{25} \\ &= 9\cdot 5 \\ &= 45\end{aligned}$$

Donc on a le systeme :

$$\begin{cases} a^2-b^2=-27 \\ ab=-18a^2+b^2=45 \end{cases}$$

On remarque que a et b sont de signes opposés, On a :

$$a^2=\frac{45-27}{2}=9 \quad \text{et} \quad b^2=\frac{45+27}{2}=36$$

Donc on a :

$$a=\pm 3 \quad \text{et} \quad b=\pm 6$$

Et donc, les solutions sont :

$$\boxed{z=\frac{9-2i-(3-6i)}{2}=3+2i} \quad \text{et} \quad \boxed{z=\frac{9-2i-(-3+6i)}{2}=6-4i}$$

(c) $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$;
On pose $Z=z^3$, alors on a :

$$Z^2+(2i-1)Z-1-i=0$$

Posons Δ le discriminant du polynôme en Z, alors on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (2i-1)^2-4(-1-i) \\ &= 4i^2-4i+1+4+4i \\ &= -4+5 \\ &= 1>0\end{aligned}$$

Donc les racines sont réelles et distinctes, et on a :

$$Z_1=\frac{-(2i-1)-1}{2}=\frac{-2i}{2}=-i \quad \text{et} \quad Z_2=\frac{-(2i-1)+1}{2}=\frac{-2i+2}{2}=1-i$$

Or $Z=z^3$, donc on a :

$$\begin{aligned}z^3 &= -i \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ z &= e^{-i\frac{\pi}{2}}\times e^{\frac{2ik\pi}{3}} \quad \text{pour } k\in[\![0,2]\!] \\ z &= \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad e^{-i\frac{7\pi}{6}}\end{aligned}$$

Et également :

$$\begin{aligned} z^3 &= 1 - i \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ z &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{\frac{2ik\pi}{3}} \quad \text{pour } k \in [\![0, 2]\!] \\ z &= \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_4 = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_6 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$$

(d) $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0$;
Posons Δ le discriminant du polynôme en z, alors on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3 + i)^2 - 4(4 - 3i) \\ &= 9 - 6i + i^2 - 16 + 12i \\ &= 9 - 16 - 1 + 6i \\ &= -8 + 6i \end{aligned}$$

Soit $w \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$ tel que $w = a + ib$ et $w^2 = -8 + 6i$, alors on a :

$$a^2 - b^2 + 2iab = -8 + 6i$$

et :

$$\begin{aligned} |w^2| &= |-8 + 6i| \\ &= \sqrt{(-8)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ ab = 3a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$$

On remarque que a et b sont de signes même signes, On a :

$$a^2 = \frac{10 - 8}{2} = 1 \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

Donc :

$$a = \pm 1 \quad \text{et} \quad b = \pm 3$$

Donc : $z = \dfrac{3 - i - (1 + 3i)}{2} = 1 - 2i \quad \text{ou} \quad z = \dfrac{3 - i - (-1 - 3i)}{2} = 2 + 2i$ Donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = 1 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = 2 + 2i}$$

(e) $z^4 - z^3 - z + 1 = 0$;
On remarque que 1 est racine de l'équation, donc on peut factoriser le polynôme par $(z-1)$:
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$$

En développant, on a :

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 - z + 1 &= (z-1)(az^3 + bz^2 + cz + d) \\ &= az^4 + bz^3 + cz^2 + dz - az^3 - bz^2 - cz - d \\ &= az^4 + (b-a)z^3 + (c-b)z^2 + (d-c)z - d \end{aligned}$$

Donc on a le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 0 \\ d - c = -1 \\ -d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

Donc on a :

$$z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(z^3 - 1) = 0$$

On remarque que 1 est racine de $z^3 - 1$, donc on peut factoriser le polynôme par $(z-1)$: Soit $u, v, w \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z^3 - 1 = (z-1)(uz^2 + vz + w)$$

En développant, on a :

$$\begin{aligned} z^3 - 1 &= (z-1)(uz^2 + vz + w) \\ &= uz^3 + vz^2 + wz - uz^2 - vz - w \\ &= uz^3 + (v-u)z^2 + (w-v)z - w \end{aligned}$$

Donc on a le système :

$$\begin{cases} u = 1 \\ v - u = 0 \\ w - v = 0 \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \\ w = 1 \end{cases}$$

Donc on a :

$$z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(z^3 - 1) = (z-1)^2(z^2 + z + 1) = 0$$

Donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = 1, \quad z_2 = j, \quad z_3 = \bar{j}}$$

(f) $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0 \\ &= -2 + i\sqrt{12} \\ &= -2 + i2\sqrt{3} \\ &= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Donc les racines sont :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{4}e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{\frac{2ik\pi}{4}} \quad \text{pour } k \in [\![0, 3]\!] \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}+i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}+i\pi} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}+i\frac{3\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{8\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} \end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

17. *Enoncé : Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (a) *Enoncé : Résoudre sur l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$*

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$$

On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
Le discriminant Δ de ce polynôme est :

$$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta)$$

Dans le cas ou $\Delta = 0$, on a :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$$

Et donc, dans ce cas la :

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, $\Delta < 0$ et on a deux racines complexes distinctes

$$\begin{aligned} z_\pm &= \frac{2\cos(\theta) \pm 2i\sin(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \pm i\sin(\theta) \\ &= e^{\pm i\theta} \end{aligned}$$

(b) *En déduire la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation*

$$z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$$

On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
Posons $X = z^n$, on a alors : $X^2 - 2X\cos(n\theta) + 1 = 0$
Le discriminant Δ de ce polynôme est :

$$\Delta = 4\cos^2(n\theta) - 4 = 4(\cos^2(n\theta) - 1) = -4\sin^2(n\theta)$$

Dans le cas ou $\Delta = 0$, on a :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin^2(n\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0[\frac{\pi}{n}]$$

Dans ce cas la, on a une racine double et :

$$X = \frac{2\cos(n\theta)}{2} = \cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \cos(n\theta)$$

Or $X = z^n$, donc :

$$z^n = \cos(n\theta)$$

Si $\theta \equiv 0[\frac{2\pi}{n}]$, $\cos(n\theta) = 1$, donc $z^n = 1$ et donc $z \in \mathbb{U}_n$
Sinon $\Delta < 0$ et on a deux racines

$$x_{\pm} = \frac{2\cos(n\theta) \pm 2i\sin(n\theta)}{2} = \cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta) = e^{\pm in\theta}$$

Comme $X = z^n$, les racines de (E) sont $z = e^{\pm i(n\theta + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

▶ Approfondissement

18. *Enoncé : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que*

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} - nz^n = 0$$

Démontrer que $|z| \leq 1$
Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z| > 1$ et

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = nz^n$$

On a donc

$$n|z|^n = \left|1 + z + \cdots + z^{n-1}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < n|z|^n$$

ce qui est absurde.

19. *Enoncé : Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que*

$$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

En se rappelant que l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est son conjugué, on trouve :

$$(c-a)^2 = (c-a)\left(\frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{(ca)(\bar{a}-\bar{c})}{\bar{a}\bar{c}} = -a\frac{|c-a|^2}{\bar{c}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 = \frac{|c-a|^2}{|c-b|^2} \in \mathbb{R}^+$$

Cette quantité est non nulle car a, b et c sont non nuls deux à deux distincts.

20. *Enoncé : Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1 . Simplifier le nombre*

$$\alpha = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$$

Puisque $\omega \neq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} &= \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^2+\omega^4+\omega^6} \\ &= \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{\frac{\omega^8-1}{\omega^2-1}}\end{aligned}$$

De plus $\omega^7 = 1$ donc $\omega^8 = \omega$ et

$$\begin{aligned}&1+\omega+\ldots+\omega^6 = 0 \\ &\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} = (1+\omega)\left(-1-\omega^3-\omega^6\right) \\ &= -1+\omega^2+\omega^5\end{aligned}$$

D'où,puisque

$$\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{\omega^3}{1+1/\omega} = \frac{\omega^4}{1+\omega}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(1+\omega)\left(-1+\omega^2+\omega^5\right)+\omega^4}{1+\omega} \\ &= \frac{-1-\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega} \\ &= \frac{-1-\omega-1-\omega}{1+\omega} = -2\end{aligned}$$

21. *Enoncé : Soit λ un nombre irrationnel. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}$$

Comme λ est irrationnel, $e^{2i\lambda\pi} \neq 1$ et ainsi, d'après la formule de la série géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} = \frac{\left(e^{2i\pi\lambda}\right)^n - 1}{e^{2i\pi\lambda} - 1} = \frac{e^{in\pi\lambda}}{e^{i\lambda\pi}} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)} = e^{i(n-1)\pi\lambda} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)}$$

et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}$$

puisque $\left|e^{i(n-1)\pi\lambda}\sin(n\pi\lambda)\right| = |\sin(n\pi\lambda)| \leqslant 1$.

22. *Enoncé : Déterminer les parties bornées non vides de $\mathbb{C}$ stables par $z \mapsto z^2 + z + 1$ et $z \mapsto z^2 - z + 1$.*

Posons $f : z \mapsto z^2 + z + 1$ et $g : z \mapsto z^2 - z + 1$.
Remarquons que $f(i) = i, f(-i) = -i, g(i) = -i$ et $g(-i) = i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} f(z) - i = f(z) - f(i) = (z-i)(z+i+1) & f(z) + i = f(z) - f(-i) = (z+i)(z-i+1) \\ g(z) - i = g(z) - g(-i) = (z+i)(z-i-1) & g(z) + i = g(z) - g(i) = (z-i)(z+i-1) \end{array}$$

On en déduit que

$$f(z)^2 + 1 = (f(z)-i)(f(z)+i) = (z-i)(z+i)(z+i+1)(z-i+1) = \left(z^2+1\right)\left(z^2+2z+2\right)$$
$$g(z)^2 + 1 = (g(z)-i)(g(z)+i) = (z+i)(z-i)(z-i-1)(z+i-1) = \left(z^2+1\right)\left(z^2-2z+2\right)$$

Montrons maintenant que $|z^2+2z+2| \geq 2$ ou $|z^2-2z+2| \geq 2$. Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$\left|z^2+2z+2\right|^2 = \left(x^2-y^2+2x+2\right)^2 + (2xy+2y)^2$$
$$\left|z^2-2z+2\right|^2 = \left(x^2-y^2-2x+2\right)^2 + (2xy-2y)^2$$

Après calcul,

$$\left|z^2+2z+2\right|^2 + \left|z^2-2z+2\right|^2 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 16x^2 + 2y^4 + 8 \geq 8$$

On en déduit donc bien que $|z^2+2z+2| \geq 2$ ou $|z^2-2z+2| \geq 2$.
Il s'ensuit que $|f(z)^2+1| \geq 2\,|z^2+1|$ ou $|g(z)^2+1| \geq 2\,|z^2+1|$. Soit maintenant B une partie bornée non vide de C stable par f et g.

Donnons-nous $z \in$ B. Ce qui précède permet de construire par récurrence une suite $(z_n)_n$ d'éléments de B telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, |z_n^2+1| \geq 2^n\,|z^2+1|$. Il suffit en effet de poser $z_0 = z$ puis une fois $z_0, \ldots, z_n$ construits de poser $z_{n+1} = f(z_n)$ ou

$z_{n+1} = g(z_n)$ suivant que $\left|f(z_n)^2+1\right| \geq 2\left|z_n^2+1\right|$ ou que $\left|g(z_n)^2+1\right| \geq 2\left|z_n^2+1\right|$. Puisque B est bornée, on a $z^2+1=0$ i.e. $z=i$ ou $z=-i$. Ainsi $\mathrm{B} \subset \{i,-i\}$.
De plus, B est non vide donc $i \in$ B ou $-i \in$ B. Puisque B est stable par $g, g(i) = -i \in$ B si $i \in$ B et $g(-i) = i \in$ B si $-i \in$ B. Finalement, $B = \{i,-i\}$.

23. *Enoncé : On dira qu'une famille finie non vide $(z_1, \dots, z_n)$ de nombres complexes vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ si :*
$-\forall k \in [\![1,n]\!], z_k^2+z_k+1 \in \{z_1,\dots,z_n\}$;
$-\forall k \in [\![1,n]\!], z_k^2-z_k+1 \in \{z_1,\dots,z_n\}$.

   (a) *Démontrer que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(\left(z^2+1 \neq 0\right) \Rightarrow \left(\left(\left|z^2+z+1\right| > |z|\right) \vee \left(\left|z^2-z+1\right| > |z|\right)\right)\right)$$

   (b) *On suppose fixée dans cette question une famille $(z_1, \dots, z_n)$ de nombres complexes vérifiant la propriété ($\mathscr{P}$).*

      i. *Justifier qu'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que z_k soit de module maximal parmi $z_1, \dots, z_n$.*

      ii. *Démontrer, à l'aide de la question 1 ., que $z_k^2+1=0$. Que peut-on en déduire quant au module de $z_1, \dots, z_n$?*

      iii. *En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe aucun $\ell \in [\![1,n]\!]$ tel que $z_\ell \neq \pm i$.*

   (c) *En conclusion, démontrer que la seule famille vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ est $(i,-i)$.*