

TD 6

Approfondissements

18. Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z| > 1$ et

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = nz^n$$

On a donc

$$n|z|^n = |1 + z + \dots + z^{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k < n|z|^n$$

ce qui est absurde.

19. En se rappelant que l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est son conjugué, on trouve :

$$(c - a)^2 = (c - a) \left(\frac{1}{\bar{c}} - \frac{1}{\bar{a}} \right) = \frac{(ca)(\bar{a} - \bar{c})}{\bar{a}\bar{c}} = -a \frac{|c - a|^2}{\bar{c}}$$

donc

$$\frac{b}{a} \left(\frac{c - a}{c - b} \right)^2 = \frac{|c - a|^2}{|c - b|^2} \in \mathbb{R}^+.$$

Cette quantité est non nulle car a, b et c sont non nuls deux à deux distincts.

21. Puisque $\omega \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} &= \frac{\omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^5}{1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6} \\ &= \frac{\omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^5}{\frac{\omega^8 - 1}{\omega^2 - 1}} \end{aligned}$$

De plus $\omega^7 = 1$ donc $\omega^8 = \omega$ et

$$\begin{aligned} 1 + \omega + \dots + \omega^6 &= 0, \\ \frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^4} &= (1 + \omega)(-1 - \omega^3 - \omega^6) \\ &= -1 + \omega^2 + \omega^5 \end{aligned}$$

D'où, puisque

$$\frac{\omega^3}{1 + \omega^6} = \frac{\omega^3}{1 + 1/\omega} = \frac{\omega^4}{1 + \omega}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(1 + \omega)(-1 + \omega^2 + \omega^5) + \omega^4}{1 + \omega} \\ &= \frac{-1 - \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}{1 + \omega} \\ &= \frac{-1 - \omega - 1 - \omega}{1 + \omega} = -2 \end{aligned}$$

21. Comme λ est irrationnel, $e^{2i\lambda\pi} \neq 1$ et ainsi, d'après la formule de la série géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} = \frac{(e^{2i\pi\lambda})^n - 1}{e^{2i\pi\lambda} - 1} = \frac{e^{in\pi\lambda}}{e^{i\lambda\pi}} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)} = e^{i(n-1)\pi\lambda} \times \frac{\sin(n\pi\lambda)}{\sin(\lambda\pi)}$$

et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\lambda\pi} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}$$

puisque $|e^{i(n-1)\pi\lambda} \sin(n\pi\lambda)| = |\sin(n\pi\lambda)| \leq 1$.

22. Posons $f : z \mapsto z^2 + z + 1$ et $g : z \mapsto z^2 - z + 1$. Remarquons que $f(i) = i, f(-i) = -i, g(i) = -i$ et $g(-i) = i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(z) - i &= f(z) - f(i) = (z - i)(z + i + 1) & f(z) + i &= f(z) - f(-i) = (z + i)(z - i + 1) \\ g(z) - i &= g(z) - g(-i) = (z + i)(z - i - 1) & g(z) + i &= g(z) - g(i) = (z - i)(z + i - 1) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(z)^2 + 1 = (f(z) - i)(f(z) + i) = (z - i)(z + i)(z + i + 1)(z - i + 1) = (z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)$$

$$g(z)^2 + 1 = (g(z) - i)(g(z) + i) = (z + i)(z - i)(z - i - 1)(z + i - 1) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$$

Montrons maintenant que $|z^2 + 2z + 2| \geq 2$ ou $|z^2 - 2z + 2| \geq 2$. Posons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

$$|z^2 + 2z + 2|^2 = (x^2 - y^2 + 2x + 2)^2 + (2xy + 2y)^2$$

$$|z^2 - 2z + 2|^2 = (x^2 - y^2 - 2x + 2)^2 + (2xy - 2y)^2$$

Après calcul,

$$|z^2 + 2z + 2|^2 + |z^2 - 2z + 2|^2 = 2x^4 + 4x^2y^2 + 16x^2 + 2y^4 + 8 \geq 8$$

On en déduit donc bien que $|z^2 + 2z + 2| \geq 2$ ou $|z^2 - 2z + 2| \geq 2$. Il s'ensuit que $|f(z)^2 + 1| \geq 2|z^2 + 1|$ ou $|g(z)^2 + 1| \geq 2|z^2 + 1|$. Soit maintenant B une partie bornée non vide de \mathbb{C} stable par f et g . Donnons-nous $z \in B$. Ce qui précède permet de construire par récurrence une suite $(z_n)_n$ d'éléments de B telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n^2 + 1| \geq 2^n |z^2 + 1|$. Il suffit en effet de poser $z_0 = z$ puis une fois z_0, \dots, z_n construits de poser $z_{n+1} = f(z_n)$ ou $z_{n+1} = g(z_n)$ suivant que $|f(z_n)^2 + 1| \geq 2|z_n^2 + 1|$ ou que $|g(z_n)^2 + 1| \geq 2|z_n^2 + 1|$. Puisque B est bornée, on a $z^2 + 1 = 0$ i.e. $z = i$ ou $z = -i$. Ainsi $B \subset \{i, -i\}$.

De plus, B est non vide donc $i \in B$ ou $-i \in B$. Puisque B est stable par g , $g(i) = -i \in B$ si $i \in B$ et $g(-i) = i \in B$ si $-i \in B$. Finalement, $B = \{i, -i\}$.