Nombres complexes

▶ Généralités calculatoires et géométriques

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
   (a) $(2+6i)(5+i)$; (c) $(2-3i)^4$; (e) $(3-i)(4+i)$; (g) $(4-3i)^2$;
   (b) $\dfrac{1+2i}{1+i}$; (d) $(2+i)^3$; (f) $\dfrac{1}{3-i}$; (h) $\dfrac{2-3i}{5+2i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
   (a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}}$; (c) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}}$; (e) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}}$; (g) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}}$;
   (b) $\dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{\pi}{12}}}$; (d) $1-e^{i\frac{\pi}{12}}$; (f) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1$; (h) $\left(1+e^{\frac{i}{6}}\right)^{27}$.
3. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)}{2+2i}\right)^{10}$.
4. Donner une description explicite de l'ensemble
$$E=\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}\ \middle|\ \frac{z+i}{z-i}\in i\mathbb{R}\right\}.$$
5. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z+\bar{z}=|z|$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z+1|=|z|+1$.
6. Démontrer que les points d'affixes $1+i$, $-(1+i)$ et $-4+2i$ forment un triangle rectangle.
7. Déterminer les entiers $n\geq 0$ tels que $(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}$.
8. Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^4\in\mathbb{R}$.

▶ Trigonométrie et exponentielles

9. Linéariser $\sin^5(x)$, $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ et $\cos(3x)\sin^3(2x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
10. En linéarisant $\sin^4(x)$, déterminer
$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right).$$
11. Soient $a,\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$; calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}\cos(a+k\theta).$$
12. On pose $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on fixe $n\in\mathbb{N}$.
    (a) Calculer j^n et $(j^2)^n$.
    (b) Exprimer sous la forme d'une somme la quantité $(1+1)^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n$.
    (c) En déduire la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}.$$
13. Calculer les sommes suivantes, pour $n\geq 1$:
$$\sum_{0\leq 2k\leq n}(-1)^k\binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leq 2k+1\leq n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}.$$
14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
    (a) $e^z=-7$; (b) $e^z=-2i$; (c) $e^z+e^{-z}=1$; (d) $e^z+e^{-z}=2i$.

► Équations algébriques

15. Déterminer les racines carrées des nombre complexes $\sqrt{3}+i$ et $5-12i$.
16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
    (a) $z^2+(5-2i)z+5-5i=0$; (c) $z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$; (e) $z^4-z^3-z+1=0$;
    (b) $z^2-(9-2i)z+26=0$; (d) $z^2+(-3+i)z+4-3i=0$; (f) $z^4+2-i\sqrt{12}=0$.
17. Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
    (a) Résoudre sur l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$
    $$z^2-2z\cos\theta+1=0$$
    On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.
    (b) En déduire la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation
    $$z^{2n}-2z^n\cos(n\theta)+1=0$$
    On précisera le nombre de solutions suivant la valeur de θ.

► Approfondissements

18. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$ tels que
    $$1+z+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0\,.$$
    Démontrer que $|z|\leq 1$
19. Soient a,b,c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts. Montrer que
    $$\frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2\in\mathbb{R}_+^*\,.$$
20. Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1 . Simplifier le nombre
    $$\alpha=\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4}+\frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$
21. Soit λ un nombre irrationnel. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, on a :
    $$\left|\sum_{k=0}^{n-1}e^{2ik\lambda\pi}\right|\leq\frac{1}{|\sin(\lambda\pi)|}\,.$$
22. Déterminer les parties bornées non vides de $\mathbb{C}$ stables par $z\mapsto z^2+z+1$ et $z\mapsto z^2-z+1$.
23. On dira qu'une famille finie non vide $(z_1,\ldots,z_n)$ de nombres complexes vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ si :
    — $\forall k\in[\![1,n]\!],\ z_k^2+z_k+1\in\{z_1,\ldots,z_n\}$;
    — $\forall k\in[\![1,n]\!],\ z_k^2-z_k+1\in\{z_1,\ldots,z_n\}$.
    (a) Démontrer que
    $$\forall z\in\mathbb{C},\quad ((z^2+1\neq 0)\Rightarrow((|z^2+z+1|>|z|)\vee(|z^2-z+1|>|z|))$$
    (b) On suppose fixée dans cette question une famille $(z_1,\ldots,z_n)$ de nombres complexes vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$.
        i. Justifier qu'il existe $k\in[\![1,n]\!]$ tel que z_k soit de module maximal parmi $z_1,\ldots,z_n$.
        ii. Démontrer, à l'aide de la question 1., que $z_k^2+1=0$. Que peut–on en déduire quant au module de $z_1,\ldots,z_n$?
        iii. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe aucun $\ell\in[\![1,n]\!]$ tel que $z_\ell\neq\pm i$.
    (c) En conclusion, démontrer que la seule famille vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ est $(i,-i)$.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{84}$

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

$\boxed{89}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.