

APPLICATIONS ET RELATIONS

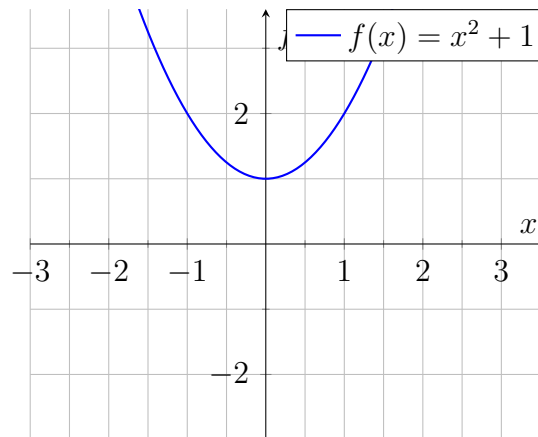
► Applications

1. *Enoncé* : Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

(a)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

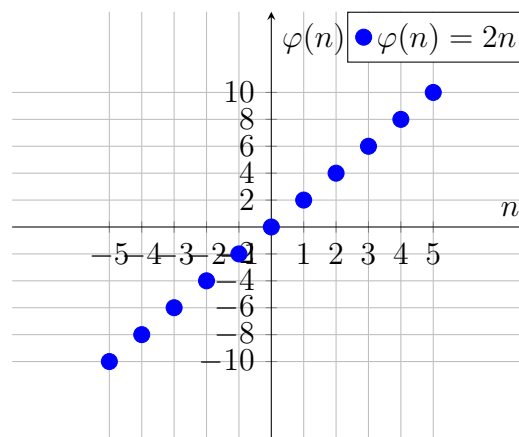


0 n'as pas d'antécédents donc f n'est pas surjectif, 2 en possède deux (1 et -1) donc f n'est pas injectif.

(b)

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto 2n$$

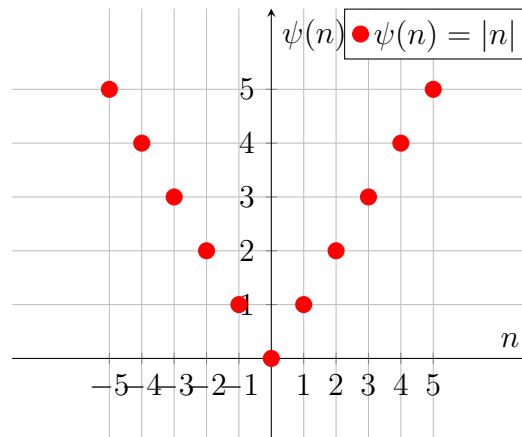


Application bijective.

(c)

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto |n|$$



Soit $y \in \mathbb{N}$, alors :

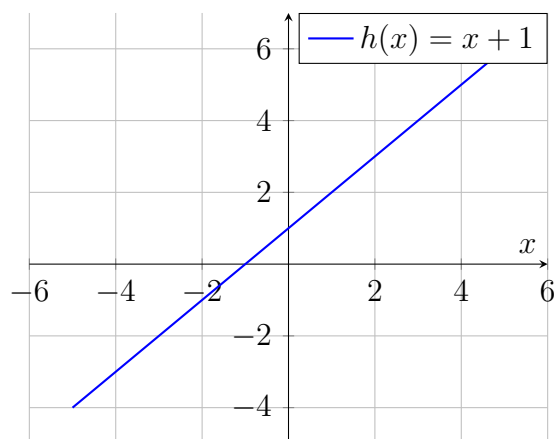
$$y = |y| = \psi(y)$$

Donc y admet un antécédent par ψ , on en déduit que ψ est surjective.

(d)

$$h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \mapsto x + 1$$

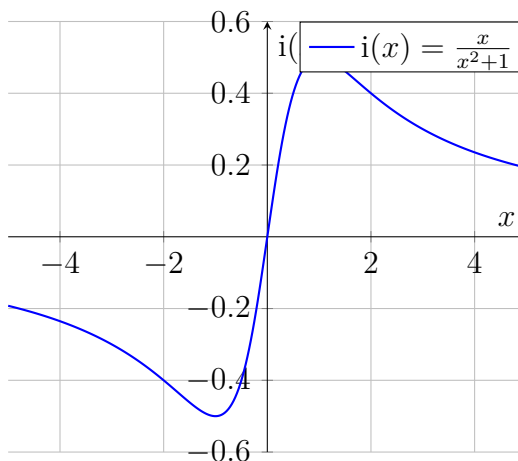


Application bijective.

(e)

$$i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$$



0 admet deux antécédents, donc i n'est pas injective, 255 n'en admet aucun donc i n'est pas surjective.

2. *Énoncé* : Tracer l'allure du graphe de la fonction suivante ; est-elle injective, surjective, bijective ?

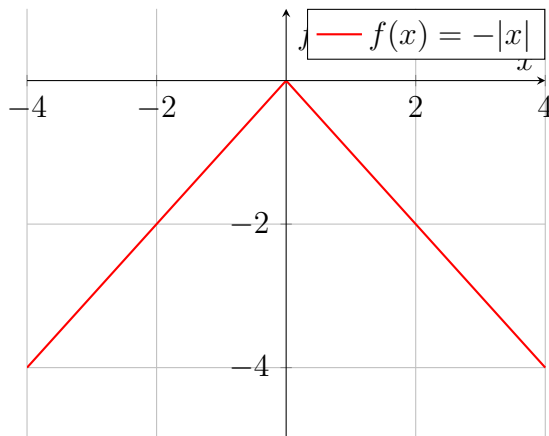
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque rapidement que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -|x|$.

$$f(1) = f(-1) = -1 \quad f \text{ est non injective}$$

1 n'as pas d'antécédents car f est négative. Donc f est non surjective



3. *Énoncé* : Déterminer les injections f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$.

Analyse : Supposons trouvés $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (f(n) \leq n) \wedge (f \text{ injectif})$

On remarque que pour :

$$n = 0 : f(0) \leq 0 \text{ et donc } f(0) = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in \mathbb{N}$$

et

$$n = 1 : f(1) \leq 1 \text{ et donc } f(1) = 1 \text{ par injectivité.}$$

Montrons par récurrence forte sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "f(n) = n"$

Initialisation : $f(0) = 0$ ok.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k$. Montrons que $f(n+1) = n+1$

On a :

$$f(n+1) \leq n+1$$

Donc $f(n+1) \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, i.e :

$$f(n+1) = n+1 \quad \text{ou} \quad \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(n+1) = k$$

Or

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(k) = k \text{ (H.R)}$$

Donc comme f est injective, $f(n+1) \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$

Donc :

$$f(n+1) = n+1$$

Conclusion : La propriété est héréditaire et initialisé, donc en vertu du principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$

Synthèse : $\text{id}_{\mathbb{N}}$ convient et est bijective (de réciproque $\text{id}_{\mathbb{N}}$).

4. *Enoncé :* Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (x, xy)$ et $g(x, y) = (x+y, x-y)$.

(a) *Les fonctions f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?*

Fonction f :

On remarque que $f(0, 1) = f(0, 2) = f(0, 0)$, donc f n'est pas injective.

De plus, supposons que : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, 1)$ alors :

$$(x, xy) = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ xy & = 1 \end{cases}$$

On a donc $0 = 1$ ce qui est absurde, donc f n'est pas surjective.

Fonction g :

Supposons $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} (a, b) &= g(x, y) \\ &= (x+y, x-y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} a & = x+y \\ b & = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{a+b}{2} \\ y & = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$h \circ g = g \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$$

Donc g est bijective de réciproque $g^{-1} = h$

- (b) Déterminer l'image et l'image réciproque de l'ensemble $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ par les applications f et g .

Posons :

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Image (f) :

On a :

$$\begin{aligned} f(\Delta) &= \{f(u) \mid u \in \Delta\} = \{f(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc si l'on pose $v = (x, y) \in f(\Delta)$, on a :

$$\begin{aligned} v \in f(\Delta) &\iff \exists u \in \Delta, v = f(u) \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} u &= (a, a) \\ v &= f(u) = (a, a^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Image réciproque (f) :

Soit $V \in \mathbb{R}^2$, $V = (x, y)$, alors :

$$\begin{aligned} V \in f^{-1}(\Delta) &\iff f(V) \in \Delta \\ &\iff \exists a \in \mathbb{R}, f(V) = (a, a) \\ &\iff (x, xy) = (a, a) \\ &\iff \begin{cases} x &= a \\ xy &= a \end{cases} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &\neq 0 \\ y &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$f^{-1}(\Delta) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$$

Image (g) :

$$\begin{aligned} g(\Delta) &= \{g(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Image réciproque (g) :

g admet une réciproque, donc :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\Delta) &= \{g^{-1}(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \left(\frac{x+x}{2}, \frac{x-x}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

5. *Enoncé : Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On fixe une application $f : E \rightarrow E$.*

(a) *Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.*

Supposons $A \subset B$,

Soit $y \in f(A)$, alors $\exists a \in A$ tel que $y = f(a)$

Or $A \subset B$, donc $a \in B$ et $y = f(a) \in f(B)$

Donc on a bien $f(A) \subset f(B)$

(b) *Montrer que $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$.*

Supposons $A \subset B$,

Soit $x \in f^{-1}(A)$, i.e $f(x) \in A \subset B$

Donc $f(x) \in B$ et $x \in f^{-1}(B)$

Donc on a bien $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(c) *Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.*

Soit $y \in f(A \cap B)$ alors $\exists x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$

Or :
$$\begin{cases} x \in A & \text{Donc } f(x) \in f(A) \\ x \in B & \text{Donc } f(x) \in f(B) \end{cases}$$

Donc $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Donc on a bien $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(d) *Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$.*

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B, y = f(x) \\ &\iff [\exists x \in A, y = f(x)] \vee [\exists x \in B, y = f(x)] \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B) \\ &\iff f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

6. *Enoncé : Soient f, g deux applications telles que $f \circ g$ soit bijective. Que dire de f et g ? Réciproquement ?*

Soit $f, g : E \rightarrow E$ tel que $f \circ g$ est bijective.

Donc $\exists h : E \rightarrow E$ tel que $h \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ h = \text{id}_E$

Si $y \in E$:

$$y = f \circ g \circ h(y) = f(g(h(y)))$$

y admet un antécédent par f , donc f est surjectif

Si $x, x' \in E$ tel que $g(x) = g(x')$ alors :

$$\begin{aligned} h \circ (f(g(x))) &= h \circ f(g(x')) \\ x &= x' \end{aligned}$$

Donc g est injectif.

7. *Enoncé : Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.*

(a) *Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) \supset A$.*

Soit $A \subset E, a \in A$, alors $f(a) \in f(A)$

Donc $a \in f^{-1}(f(A))$

Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$

(b) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

$\Rightarrow :$

Supposons que f est injective

Soit $y \in f^{-1}(f(A))$, i.e $f(y) \in f(A)$

Donc $\exists a \in A$ tel que $f(y) = f(a)$

Or f est injective, donc $y = a \in A$

Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$

$\Leftarrow :$

Supposons que $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$,

Soit $x, x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$

Alors $f(x') = f(x) \in f(\{x\})$

Donc $x' \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, donc $x = x'$

Donc f est injective

8. *Enoncé* : Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$; on considère l'application

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto (X \cup A, X \cup B). \end{aligned}$$

Démontrer que η est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow :$

Supposons que η est injective, alors :

$$\begin{aligned} \eta(A \cap B) &= ((A \cap B) \cup A, (A \cap B) \cup B) \\ &= (A, B) \\ &= \eta(\emptyset) \end{aligned}$$

Donc par injectivité, $A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow :$

Supposons $A \cap B = \emptyset$

Soit $X, X' \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\eta(X) = \eta(X')$ alors :

$$\begin{aligned} \eta(X) &= \eta(X') \\ (A \cup X, B \cup X) &= (A \cup X', B \cup X') \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} A \cup X = A \cup X' \\ B \cup X = B \cup X' \end{cases}$$

$$\text{Soit } x \in X, \text{ alors : } \begin{cases} x \in A \cup X = A \cup X' \\ x \in B \cup X = B \cup X' \end{cases} \iff \begin{cases} (x \in A) \vee (x \in X') \\ (x \in B) \vee (x \in X') \end{cases}$$

$$\text{On a } A \cap B = \emptyset \text{ donc : } \begin{cases} \text{Si : } x \notin B, x \in X' \\ \text{Si : } x \notin A, x \in X' \end{cases}$$

Donc $x \in X'$ et $X \subset X'$. De manière similaire $X' \subset X$ et donc $X = X'$

Donc η est injective.

9. *Enoncé* : Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer que :

(a) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

Soit $x \in E$, On a : $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) \in \{0, 1\}$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 &\iff x \in (A \cap B) \\ &\iff (x \in A) \wedge (x \in B) \\ &\iff (\mathbb{1}_A(x) = 1) \wedge (\mathbb{1}_B(x) = 1) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

(b) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1 &\iff x \in (A \cup B) \\ &\iff (x \in A) \vee (x \in B) \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \vee \mathbb{1}_B(x) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

(c) $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$

Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{B \setminus A}(x) = 1 &\iff x \in B \setminus A \\ &\iff x \in B \wedge x \notin A \\ &\iff \mathbb{1}_B(x) = 1 \wedge \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$

(d) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

On a : $\mathbb{1}_{\bar{A}} = \mathbb{1}_{E \setminus A} = \mathbb{1}_E (\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_A)$ Or $\forall x \in E, \mathbb{1}_E(x) = 1$, Donc $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ **► Relations d'ordre**10. *Enoncé : Montrer que la relation "divise" est une relation d'ordre sur \mathbb{N} .*Réflexive :Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $n = 1 \times n$.Donc $n|n$ Antisymétrie :Soit $n, p \in \mathbb{N}$ telles que $\begin{cases} n|p \\ p|n \end{cases}$ i.e $\exists k, l \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n = kp \\ p = ln \end{cases}$ Si $n = 0$, alors $p = n = 0$ et donc $n = p$ Sinon $\begin{cases} kl = 1 \\ k, l \in \mathbb{N} \end{cases}$ donc $k = l = 1$ et donc $n = p$ Transitivité :Soit $n, p, k \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n|p \\ p|k \end{cases}$ i.e $\exists u, v \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} p = un \\ k = vp \end{cases}$ Donc $k = vp = vun$ et donc $n|k$

11. *Enoncé* : Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire \preceq par

$$x \preceq y \iff f(x) \leq f(y)$$

Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur E .

Réflexive :

Soit $x \in E$, alors $f(x) \leq f(x)$, donc $x \preceq x$

Antisymétrie :

Soit $x, y \in E$ tel que $\begin{cases} x \preceq y \\ y \preceq x \end{cases}$

Alors on a : $\begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ f(y) \leq f(x) \end{cases}$. Donc $f(x) = f(y)$

Et par injectivité de f on a $x = y$.

Transitivité :

Soit $x, y, z \in E$ tel que $\begin{cases} x \preceq y \\ y \preceq z \end{cases}$

Alors $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$. En particulier $f(x) \leq f(z)$.

Donc $x \preceq z$

12. *Enoncé* : Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tous réels a, b on pose

$$a \leq_f b \iff f(b) - f(a) \geq |b - a|$$

- (a) Montrer que \leq_f est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

Réflexive :

Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $f(a) - f(a) = |a - a| = 0$

Donc $f(a) - f(a) \geq |a - a|$ et donc $a \leq_f a$

Antisymétrie :

Soit $a, b \in E$ tel que $\begin{cases} a \leq_f b \\ b \leq_f a \end{cases}$

Ainsi, on a : $\begin{cases} f(b) - f(a) \geq |b - a| \\ f(a) - f(b) \geq |a - b| \end{cases}$.

Donc en remarquant que $|b - a| = |a - b|$ et en sommant :

$$f(b) - f(a) + f(a) - f(b) = 0 \geq 2|b - a|$$

Donc $|b - a| = 0$ et donc $a = b$

Transitivité :

Soit $a, b, c \in E$ tel que $\begin{cases} a \leq_f b \\ b \leq_f c \end{cases}$

Ainsi, on a : $\begin{cases} f(b) - f(a) \geq |b - a| \\ f(c) - f(b) \geq |c - b| \end{cases}$.

Donc en sommant :

$$f(b) - f(a) + f(c) - f(b) = f(c) - f(a) \geq |b - a| + |c - b| \geq |c - a|$$

Donc on a bien $a \leq_f c$

(b) Montrer que cette relation d'ordre est totale si et seulement si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |f(b) - f(a)| \geq |b - a|$$

\Rightarrow :

Supposons que \leq_f est une relation d'ordre totale.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} a \leq_f b & \quad \vee \quad b \leq_f a \\ f(b) - f(a) \geq |b - a| & \quad \vee \quad f(a) - f(b) \geq |a - b| \\ |f(b) - f(a)| \geq |b - a| & \quad \vee \quad |f(a) - f(b)| \geq |a - b| \\ |f(b) - f(a)| \geq |b - a| & \quad \vee \quad |f(b) - f(a)| \geq |b - a| \end{aligned}$$

Donc ok.

\Leftarrow :

Supposons que $\forall a, b \in \mathbb{R}, |f(b) - f(a)| \geq |b - a|$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| & \geq |b - a| \\ f(b) - f(a) \geq |b - a| & \quad \vee \quad f(a) - f(b) \geq |b - a| \\ f(b) - f(a) \geq |b - a| & \quad \vee \quad f(a) - f(b) \geq |a - b| \\ a \leq_f b & \quad \vee \quad b \leq_f a \end{aligned}$$

Donc ok.

(c) Que dire si $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$?

Si $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, alors $f(b) = b$ et $f(a) = a$. Et donc :

$$a \leq_f b \iff b - a \geq |b - a| \iff a \leq b$$

Donc la relation \leq_f devient la relation \leq

► Relations d'équivalence, partitions

13. *Enoncé* : Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(a) Démontrer que la relation \mathcal{R} définie sur E par

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.

Réflexive :

Soit $x \in E$, alors $f(x) = f(x)$

Donc $x\mathcal{R}x$

Symétrie :

Soit $x, y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$

Alors, on a : $f(x) = f(y)$.

Donc $f(y) = f(x)$ et $y\mathcal{R}x$

Transitivité :

Soit $x, y, z \in E$ tel que $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases}$

Ainsi, on a : $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases}$.

Donc $f(x) = f(y) = f(z)$ et $x\mathcal{R}z$

(b) On se place dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$ et $f = \cos$. Quelle est la classe de 0 ? De $\frac{\pi}{2}$? De π ?

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff \cos(x) = \cos(y)$

Et donc :

$$x \equiv y[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y[2\pi]$$

Donc :

$$\begin{aligned} C_0 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \cos(0)\} \\ &= \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0[2\pi]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\frac{\pi}{2}} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{R}\frac{\pi}{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2})\} \\ &= \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_\pi &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} \pi\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = \cos(\pi)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi\} \\
&= \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

14. *Enoncé : On définit sur \mathbb{Z} la relation \mathcal{R} par $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et en déterminer les classes d'équivalence. Posons $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x + y = 2k$.*

Réflexive :

Soit $x \in \mathbb{Z}$, alors $x + x = 2x$

Donc on a bien $x \mathcal{R} x$.

Symétrie :

Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x \mathcal{R} y$

Alors : $\exists k \in \mathbb{Z}, x + y = 2k$.

Or $x + y = y + x$ et donc $y \mathcal{R} x$

Transitivité :

Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases}$, alors : $\begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z}, x + y = 2k_1 \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}, y + z = 2k_2 \end{cases}$.

Donc :

$$x + 2y + z = 2(k_1 + k_2)$$

En soustrayant $2y$ des deux cotés :

$$x + z = 2(k_1 + k_2 - y)$$

On a bien $k_1 + k_2 - y \in \mathbb{Z}$ et donc $x \mathcal{R} z$

Soit $x \in \mathbb{Z}$, alors la classe de x est l'ensemble :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \{y \in \mathbb{Z} \mid x \mathcal{R} y\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid x + y = 2k \mid k \in \mathbb{Z}\mathcal{R}\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid x + y \equiv 0[2]\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv -y[2]\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y[2]\}
\end{aligned}$$

15. *Enoncé : On définit une relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} de la façon suivante :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \mathcal{R} y) \iff (x^2 - y^2 = x - y)$$

- (a) *Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.*

Réflexive :

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 - x^2 = x - x = 0$

Donc on a bien $x \mathcal{R} x$.

Symétrie :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \mathcal{R} y$

Alors : $x^2 - y^2 = x - y$.

En multipliant l'égalité par -1 on a : $y^2 - x^2 = y - x$ et donc $y\mathcal{R}x$

Transitivité :

Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases}$.

En additionnant les égalités, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + y^2 - z^2 &= x - y + y - z \\ x^2 - z^2 &= x - z \end{aligned}$$

Donc $x\mathcal{R}z$

(b) Déterminer la classe d'un élément x de \mathbb{R} . De combien d'éléments ces classes sont-elles constituées ?

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$

Alors :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x + y \\ \frac{(x - y)(x + y)}{x + y} &= 1 \\ x - y &= 1 \\ x &= 1 - x \end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{x} = \{x, 1 - x\}$$

16. *Enoncé :* Soient E, F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application surjective. On pose, pour tout $x \in F$,

$$A_x = f^{-1}(\{x\})$$

Montrer que les A_x forment une partition de E .

Posons $f : E \rightarrow F$,

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in F, \quad A_x &= f^{-1}(\{x\}) \\ &= \{y \in E \mid f(y) \in \{x\}\} \\ &= \{y \in E \mid f(y) = x\} \end{aligned}$$

Or f est surjective, donc $\forall x \in F, \exists y \in E$ tel que $x = f(y)$

- Donc $\forall x \in F, A_x \subset E$ et $A_x \neq \emptyset$
- Soit $x, y \in F$ tel que $x \neq y$

$$\begin{aligned} A_x \cap A_y &= \{a \in E \mid f(a) \in \{x\}\} \cap \{b \in E \mid f(b) \in \{y\}\} \\ &= \{a \in E \mid f(a) = x\} \cap \{b \in E \mid f(b) = y\} \end{aligned}$$

Or $x \neq y$, donc $\forall a, b \in E, f(a) \neq f(b)$

Donc $A_x \cap A_y = \emptyset$

Donc les pour tout $x \in F, A_x$ forment une partition de E

► Approfondissement

17. *Énoncé* : Déterminer les applications $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

Soit f une telle application (si elle existe). On va montrer par récurrence que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(k) = k$.

On a $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$. Or $f(0), f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels ; en particulier, ils sont positifs. On a donc $f(0) = 0$. Supposons HR(n) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3(n+1)$. Supposons par l'absurde que $f(n+1) \neq n+1$. Un des trois entiers $f(n+1), f^2(n+1)$ et $f^3(n+1)$ est nécessairement strictement inférieur à $n+1$. Examinons les trois cas.

- Si $f(n+1) < n+1$. Notons $k = f(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^2(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^3(n+1) = k$. Ainsi $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^2(n+1) < n+1$. Notons $k = f^2(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^3(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^4(n+1) = k$. Ainsi $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$. Donc $f(n+1) = k$. Mais alors $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.
- Si $f^3(n+1) < n+1$. Notons $k = f^3(n+1)$. Puisque $k \leq n$, $f^4(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^5(n+1) = k$. Ainsi $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3f^2(n+1)$. Donc $f^2(n+1) = k$. Mais alors $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. On a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$ donc $f(n+1) = k$. Finalement, $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $f(n+1) = n+1$ et donc HR($n+1$) est vraie.

On a donc montré que si f vérifiait la condition de l'énoncé, alors f était nécessairement l'identité. Réciproquement, la fonction identité vérifie bien la condition recherchée.

18. *Énoncé* : Dans \mathbb{N}^* , on considère la relation \mathcal{R} suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$$

(a) Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

- La réflexivité est claire : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathcal{R}p$ puisque $p = p^1$.
- Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $p = q^m$. Cela implique que $p^{nm} = p$. Puisque $p \neq 0$,

$$p^{nm} = p \iff p^{nm-1} = 1 \iff p = 1 \text{ ou } nm = 1$$

Si $p = 1$, on a $q = 1^n = 1 = p$, et si $nm = 1$, on a $n = m = 1$ d'où $q = p^1 = p$. La relation est donc antisymétrique.

- Soient $(p, q, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p\mathcal{R}r$. La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.

(b) La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée pour cette relation d'ordre ?

Supposons que $\{2, 3\}$ admette un majorant p . On a alors $2\mathcal{R}p$ et $3\mathcal{R}p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.

Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2, 3\}$ n'est pas majorée.

19. *Énoncé* Soient E, F deux ensembles non vides et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Démontrer que :

(a) f est injective $\Leftrightarrow \exists g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$;

(\Rightarrow) Supposons f injective et fixons un élément arbitraire $y \in F$. Nous pouvons alors définir g par le procédé suivant : pour tout $y \in F$, soit y admet un (unique) antécédent $x \in E$ et dans ce cas nous posons $g(y) = x$, soit ce n'est pas le cas et alors nous fixons $g(y) = e$ pour un élément $e \in E$ arbitraire.

(\Leftarrow) Supposons f inversible à gauche d'inverse $g : F \rightarrow E$ et soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en composant cette égalité à gauche par g nous obtenons $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, i.e $x = x'$. On en déduit que f est bien injective.

(b) f est surjective $\Leftrightarrow \exists g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$.

(\Rightarrow) Supposons f surjective. Alors, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; il nous suffit de poser $g(y) = x$ pour avoir $f \circ g(y) = f(x) = y$.

(\Leftarrow) Supposons f inversible à droite d'inverse $g : F \rightarrow E$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $f(g(y)) = y$; $g(y)$ est donc un antécédent de y , ce qui prouve la surjectivité de f .

20. *Énoncé* : On munit \mathbb{N}^2 de la relation suivante \sim définie par :

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

(a) Démontrer que ceci définit une relation d'équivalence.

Immédiat.

(b) Établir une bijection entre l'ensemble des classes modulo \sim et \mathbb{Z} .

Associer à $n \geq 0$ la classe de $(n, 0)$ et à $n < 0$ celle de $(0, n)$. Réciproquement, à la classe de (n, p) associer $n - p$.

21. *Énoncé* : Soit E un ensemble ; démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \{0, 1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est une bijection.

L'application est injective car si les indicatrices de A et B sont égales, un élément est dans A si et seulement si il est dans B et donc $A = B$.

Pour la surjectivité, remarquer que toute fonction $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ est l'indicatrice de $f^{-1}(\{1\})$.