TD 5

Approfondissements

17. Soit f une telle application (si elle existe). On va montrer par récurrence que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!], f(k) = k$.
    On a $f(0) + f^2(0) + f^3(0) = 3 \times 0 = 0$. Or $f(0), f^2(0)$ et $f^3(0)$ sont des entiers naturels ; en particulier, ils sont positifs. On a donc $f(0) = 0$.
    Supposons HR(n) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3(n+1)$. Supposons par l'absurde que $f(n+1) \neq n+1$. Un des trois entiers $f(n+1), f^2(n+1)$ et $f^3(n+1)$ est nécessairement strictement inférieur à $n+1$. Examinons les trois cas.

— Si $f(n+1) < n+1$. Notons $k = f(n+1)$. Puisque $k \leq n, f^2(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^3(n+1) = k$. Ainsi $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

— Si $f^2(n+1) < n+1$. Notons $k = f^2(n+1)$. Puisque $k \leq n, f^3(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^4(n+1) = k$. Ainsi $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$. Donc $f(n+1) = k$. Mais alors $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

— Si $f^3(n+1) < n+1$. Notons $k = f^3(n+1)$. Puisque $k \leq n, f^4(n+1) = f(k) = k$ en utilisant HR(n). De même, $f^5(n+1) = k$. Ainsi $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3k$. Mais on a également $f^3(n+1) + f^4(n+1) + f^5(n+1) = 3f^2(n+1)$. Donc $f^2(n+1) = k$. Mais alors $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3k$. On a également $f^2(n+1) + f^3(n+1) + f^4(n+1) = 3f(n+1)$ donc $f(n+1) = k$. Finalement, $f(n+1) + f^2(n+1) + f^3(n+1) = 3k < 3(n+1)$, ce qui est impossible.

On a donc nécessairement $f(n+1) = n+1$ et donc HR($n+1$) est vraie.

On a donc montré que si f vérifiait la condition de l'énoncé, alors f était nécessairement l'identité. Réciproquement, la fonction identité vérifie bien la condition recherchée.

18. (a) - La réflexivité est claire : pour tout $p \in \mathbb{N}^*, p\mathcal{R}p$ puisque $p = p^1$.

— Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $p = q^m$. Cela implique que $p^{nm} = p$. Puisque $p \neq 0$,

$$p^{nm} = p \Longleftrightarrow p^{nm-1} = 1 \Longleftrightarrow p = 1 \text{ ou } nm = 1$$

Si $p = 1$, on a $q = 1^n = 1 = p$, et si $nm = 1$, on a $n = m = 1$ d'où $q = p^1 = p$. La relation est donc antisymétrique.

— Soient $(p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}r$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $q = p^n$ et $r = q^m$, ce qui implique $r = p^{nm}$, donc $p\mathcal{R}r$. La relation est donc transitive.

L'ordre n'est pas total puisque par exemple aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ni $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.

(b) Supposons que $\{2,3\}$ admette un majorant p. On a alors $2\mathcal{R}p$ et $3\mathcal{R}p$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = 2^n$ et $p = 3^m$. Ainsi p est à la fois pair et impair, ce qui est absurde.
Ce raisonnement par l'absurde prouve que $\{2,3\}$ n'est pas majorée.

19. (a) Immédiat.
    (b) Associer à $n \geq 0$ la classe de $(n,0)$ et à $n < 0$ celle de $(0,n)$. Réciproquement, à la classe de (n,p) associer $n - p$.

20. (a)($\Rightarrow$) Supposons f injective et fixons un élément arbitraire $\in E$. Nous pouvons alors définir g par le procédé suivant : pour tout $y \in F$, soit y admet un (unique) antécédent $x \in E$ et dans ce cas nous posons $g(y) = x$, soit ce n'est pas le cas et alors nous fixons $g(y) =$.

    ($\Leftarrow$) Supposons f inversible à gauche d'inverse $g : F \to E$ et soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en composant cette égalité à gauche par g nous obtenons $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, *i.e* $x = x'$. On en déduit que f est bien injective.

    (b)($\Rightarrow$) Supposons f surjective. Alors, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; il nous suffit de poser $g(y) = x$ pour avoir $f \circ g(y) = f(x) = y$.

    ($\Leftarrow$) Supposons f inversible à droite d'inverse $g : F \to E$. Alors, pour tout $y \in F$, on a $f(g(y)) = y$; $g(y)$ est donc un antécédent de y, ce qui prouve la surjectivité de f.

21. L'application est injective car si les indicatrices de A et B sont égalements, un élément est dans A si et seulement si il est dans B et donc $A = B$.

Pour la surjectivité, remarquer que toute fonction $f : E \to \{0, 1\}$ est l'indicatrice de $f^{-1}(\{1\})$.