

## APPLICATIONS ET RELATIONS

## ► Applications

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$(a) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (b) \quad \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (c) \quad \psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad (d) \quad h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad (e) \quad i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 1 \quad n \mapsto 2n \quad n \mapsto |n| \quad x \mapsto x + 1 \quad x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$$

2. Tracer l'allure du graphe de la fonction suivante ; est-elle injective, surjective, bijective ?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases} .$$

3. Déterminer les injections  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$ .

4. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x, y) = (x, xy)$  et  $g(x, y) = (x + y, x - y)$ .

(a) Les fonctions  $f$  et  $g$  sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

(b) Déterminer l'image et l'image réciproque de l'ensemble  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  par les applications  $f$  et  $g$ .

5. Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . On fixe une application  $f: E \rightarrow E$ .

(a) Montrer que  $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$ .

(b) Montrer que  $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$ .

(c) Comparer  $f(A \cap B)$  et  $f(A) \cap f(B)$ .

(d) Comparer  $f(A \cup B)$  et  $f(A) \cup f(B)$ .

6. Soient  $f, g$  deux applications telles que  $f \circ g$  soit bijective. Que dire de  $f$  et  $g$  ? Réciproquement ?

7. Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f: E \rightarrow F$  une application.

(a) Montrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) \supset A$ .

(b) Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$ .

8. Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  ; on considère l'application

$$\eta: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$$

$$X \mapsto (X \cup A, X \cup B) .$$

Démontrer que  $\eta$  est injective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

9. Soit  $E$  un ensemble et soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Démontrer que :

(a)  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$  ;

(b)  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$  ;

(c)  $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)$  ;

(d)  $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ .

## ► Relations d'ordre

10. Montrer que la relation "divise" est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}$ .

11. Soient  $E$  un ensemble et  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  une application injective. On définit sur  $E$  une relation binaire  $\preccurlyeq$  par

$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y)$$

Montrer que  $\preccurlyeq$  est une relation d'ordre sur  $E$ .

12. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tous réels  $a, b$  on pose

$$a \leq_f b \iff f(b) - f(a) \geq |b - a|$$

(a) Montrer que  $\leq_f$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer que cette relation d'ordre est totale si et seulement si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |f(b) - f(a)| \geq |b - a| .$$

(c) Que dire si  $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  ?

## ► Relations d'équivalence, partitions

13. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

(a) Démontrer que la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $E$  par

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.

(b) On se place dans le cas où  $E = F = \mathbb{R}$  et  $f = \cos$ . Quelle est la classe de 0 ? De  $\frac{\pi}{2}$  ? De  $\pi$  ?

14. On définit sur  $\mathbb{Z}$  la relation  $\mathcal{R}$  par  $x\mathcal{R}y$  si et seulement si  $x + y$  est pair. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence et en déterminer les classes d'équivalence.

15. On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}$  de la façon suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{R}y) \iff (x^2 - y^2 = x - y).$$

(a) Démontrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer la classe d'un élément  $x$  de  $\mathbb{R}$ . De combien d'éléments ces classes sont-elles constituées ?

16. Soient  $E, F$  deux ensembles et soit  $f : E \rightarrow F$  une application surjective. On pose, pour tout  $x \in F$ ,

$$A_x = f^{-1}(\{x\}).$$

Montrer que les  $A_x$  forment une partition de  $E$ .

## ► Approfondissements

17. Déterminer les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

18. Dans  $\mathbb{N}^*$ , on considère la relation  $\mathcal{R}$  suivante :

$$p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad q = p^n.$$

(a) Démontrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

(b) La partie  $\{2, 3\}$  est-elle majorée pour cette relation d'ordre ?

19. Soient  $E, F$  deux ensembles non vides et soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Démontrer que :

(a)  $f$  est injective  $\iff \exists g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = \text{id}_E$  ;

(b)  $f$  est surjective  $\iff \exists g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_F$ .

20. On munit  $\mathbb{N}^2$  de la relation suivante  $\sim$  définie par :

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

(a) Démontrer que ceci définit une relation d'équivalence.

(b) Établir une bijection entre l'ensemble des classes modulo  $\sim$  et  $\mathbb{Z}$ .

21. Soit  $E$  un ensemble ; démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \{0, 1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est une bijection.