

FONCTIONS USUELLES

► Trigonométrie circulaire

1. *Enoncé* : Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :

(a) $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

(b) $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$$\begin{aligned} \cos(p) - \cos(q) &= \cos\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) - \cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$$\begin{aligned} \sin(p) + \sin(q) &= \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

(d) $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \sin(p) - \sin(q) &= \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$

2. *Enoncé* : Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que $\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$.

$$\begin{aligned} \cos(3a) &= \cos(2a + a) = \cos(2a) \cos(a) - \sin(a) \sin(2a) \\ &= [\cos^3(a) - \sin^2(a) \cos(a)] - [2 \sin^2(a) \cos(a)] \\ &= [\cos^3(a) - (1 - \cos^2(a)) \cos(a)] - [2(1 - \cos^2(a)) \cos(a)] \\ &= [2 \cos^3(a) - \cos(a)] - [2 \cos(a) - 2 \cos(a)^3] \\ &= 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a) \end{aligned}$$

3. *Enoncé* : Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$;

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\pi}{6} + x &\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] & \frac{\pi}{6} + x &\equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ x &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & x &= -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(b) $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(x) &= \frac{1}{4} \\ 2 \sin(x) \cos(x) &= \frac{1}{2} \\ \sin(2x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \sin(2x) &= \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ 2x &\equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] & 2x &\equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \\ x &= \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & x &= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(c) $\sin(x) = \sin(4x)$;

$$\begin{aligned} x &\equiv 4x [2\pi] & x &\equiv \pi - 4x [2\pi] \\ x &= 4x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & x &= \pi - 4x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2}{3}k\pi & x &= \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}k\pi \end{aligned}$$

(d) $\sin(x) = \cos(3x)$.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x &\equiv 3x [2\pi] & \frac{\pi}{2} - x &\equiv -3x [2\pi] \\ \frac{\pi}{2} - x &= 3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \frac{\pi}{2} - x &= -3x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} & x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

4. *Enoncé* : Simplifier, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x))$ et $\sin(\arctan(x))$.

Posons $\theta = \arctan(x)$, d'une part

$$\begin{aligned} \tan \theta &= x \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= x \\ \sin \theta &= x \cos \theta \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 \\ \cos^2 \theta + (x \cos \theta)^2 &= 1 \\ \cos^2 \theta (1 + x^2) &= 1 \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Comme $\theta = \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos \theta > 0$; d'où :

$$\begin{aligned}\cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

5. *Énoncé : Résoudre les équations suivantes d'inconnue x (attention au domaine de définition...)* :

- (a) $\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$;
arccos est définie sur $[-1,1]$, donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1, 1], \quad x &= \cos\left(2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\arccos\left(\frac{3}{4}\right)\right) - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{18}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{8}}$$

- (b) $\arcsin(x) = \arctan(2x)$;
arcsin est définie sur $[-1,1]$, posons $\forall x \in [-1, 1]$:

$$t = \arcsin(x) \quad x = \sin(t)$$

$$t = \arctan(2 \sin(t))$$

$$\tan(t) = 2 \sin(t)$$

$$\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = 2 \sin(t)$$

$$\sin(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\sin(t) (2 \sin(t) - 1) = 0$$

$$\sin t = 0 \quad 2 \cos t - 1 = 0$$

$$t = 0 \quad \cos t = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin t = 0 \quad t = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$x = \sin t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{x \in \left\{0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

- (c) $\arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$;

arccos et arcsin sont définies sur $[-1, 1]$, donc $\forall x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
 x &= \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{4} \times \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{3} \times \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{4} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{8}{9}} - \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15}{16}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{15}}{12} \\
 &= \boxed{\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}}
 \end{aligned}$$

(d) $\arcsin(2x) = \arctan(x)$.

arcsin est définie sur $[-1, 1]$, donc $2x \in [-1, 1]$, soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Posons $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$t = \arctan(x) \quad x = \tan(t)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \arcsin(2x) &= t \\
 \arcsin(2 \tan(t)) &= t \\
 2 \tan(t) &= \sin(t) \\
 \frac{2 \sin(t)}{\cos(t)} &= \sin(t) \\
 2 \sin(t) &= \sin(t) \cos(t) \\
 \sin(t)(2 - \cos(t)) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(t) = 0 & & 2 - \cos(t) = 0 \\
 t = 0 & & \cos(t) = 2 \\
 x = \tan(t) = 0 & &
 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 0}$$

6. *Enoncé* : Déterminer l'ensemble $E = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \cos(\theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \right\}$.

Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'équation $\cos(\theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ est satisfaite pour :

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

Par périodicité de la fonction cosinus (période 2π) :

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

7. *Enoncé* : Démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

Posons :

$$F : \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$$

La fonction F est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x} \times \sqrt{1-x}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \times 2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-(4x^2-4x+1)}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x(1-x)}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0. \end{aligned}$$

Donc F est constante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, i.e.

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad F(x) = c.$$

Calculons cette constante :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \arcsin(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

8. *Énoncé* : Soit $x \in]-\pi, \pi[$ et soit $t = \tan(x/2)$. Établir les formules suivantes :

(a) $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ &= 2 \times \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + t^2} - 1 \\ &= \frac{2 - (1 + t^2)}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

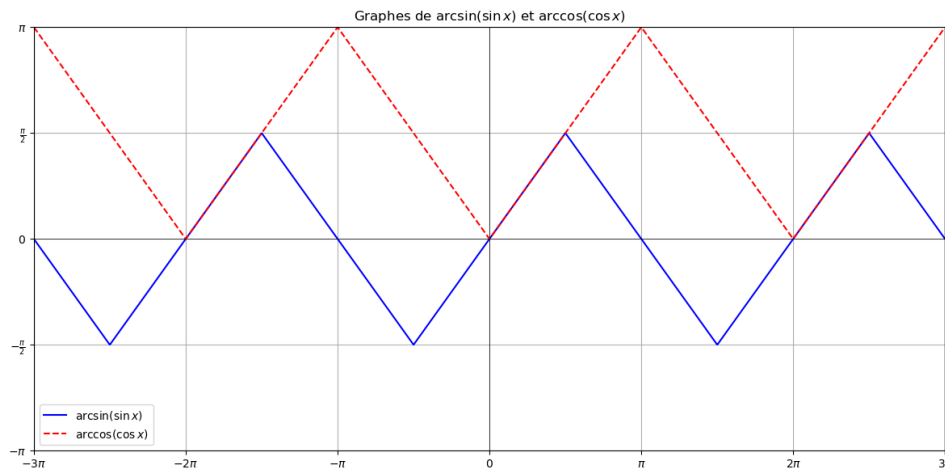
(b) $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$;

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= 2t \times \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (\text{car } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}) \\
 &= 2t \times \frac{1}{1+t^2} \\
 &= \boxed{\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}}
 \end{aligned}$$

(c) $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$, si $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\begin{aligned}
 \tan(x) &= \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
 &= \frac{2t}{1-t^2} \\
 &= \boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}
 \end{aligned}$$

9. *Enoncé* : Tracer les graphes des fonctions arcsin o sin et arcos o cos.



► Trigonométrie Hyperbolique

10. *Enoncé* : Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que :

(a) $\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}(x) \text{ch}(y) \pm \text{sh}(x) \text{sh}(y)$;

Démonstration pour le cas + :

$$\text{ch}(x+y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left[(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[2e^{x+y} + 2e^{-x-y} \right] \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(x+y)
\end{aligned}$$

Démonstration pour le cas - :

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y)$$

Par parité :

$$\operatorname{ch}(-y) = \operatorname{ch}(y), \quad \operatorname{sh}(-y) = -\operatorname{sh}(y)$$

Donc :

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x+(-y)) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(-y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(-y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y)$$

$$\boxed{\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y)}$$

(b) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)$.

Démonstration du cas + :

$$\operatorname{sh}(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left[(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[2e^{x+y} - 2e^{-x-y} \right] = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y)
\end{aligned}$$

Démonstration du cas - par parité :

$$\operatorname{sh}(-y) = -\operatorname{sh}(y), \quad \operatorname{ch}(-y) = \operatorname{ch}(y)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh}(x+(-y)) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(-y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(-y) \\
&= \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)}$$

11. *Enoncé* : Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\boxed{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}}}$$

12. *Enoncé* : Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; on pose $t = \tan(\theta/2)$ et $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(a) Démontrer que $x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

$$\begin{aligned} x &= \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{\tan(\frac{\theta}{2}) + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})\tan(\frac{\pi}{4})}\right) \\ &= \ln\left(\frac{t + 1}{1 - t \times 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + t}{1 - t}\right) \end{aligned}$$

(b) En déduire une expression de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.

$$\text{On a } x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \text{ et donc } e^x = \frac{1+t}{1-t}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\frac{1+t}{1-t} + \frac{1-t}{1+t}}{2} = \frac{(1+t)^2 + (1-t)^2}{2(1-t)(1+t)} = \frac{2(1+t^2)}{2(1-t^2)} = \frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\frac{1+t}{1-t} - \frac{1-t}{1+t}}{2} = \frac{(1+t)^2 - (1-t)^2}{2(1-t)(1+t)} = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \sin(\theta)$$

(c) Exprimer θ en fonction de x .

Puisque :

$$\operatorname{th}(x) = \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

alors :

$$\theta = \arcsin(\operatorname{th}(x))$$

13. *Enoncé* : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ka + b) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(ka + b).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ka + b) &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{ka+b} + e^{-ka-b}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n e^{ka+b} + \sum_{k=0}^n e^{-ka-b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^b \sum_{k=0}^n e^{ka} + e^{-b} \sum_{k=0}^n e^{-ka} \right) \end{aligned}$$

Par suite géométriques :

$$\sum_{k=0}^n e^{ka} = \frac{1 - e^{(n+1)a}}{1 - e^a}, \quad \sum_{k=0}^n e^{-ka} = \frac{1 - e^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ka + b) = \frac{1}{2} \left(e^b \times \frac{1 - e^{(n+1)a}}{1 - e^a} + e^{-b} \times \frac{1 - e^{-(n+1)a}}{1 - e^{-a}} \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(ka + b) &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{ka+b} - e^{-ka-b}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^b \sum_{k=0}^n e^{ka} - e^{-b} \sum_{k=0}^n e^{-ka} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(ka + b) = \frac{1}{2} \left(e^b \times \frac{1 - (e^a)^{n+1}}{1 - e^a} - e^{-b} \times \frac{1 - (e^{-a})^{n+1}}{1 - e^{-a}} \right)}$$

14. *Enoncé* :

(a) *Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.*

Posons :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x) \end{aligned}$$

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} , et on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{1}{1 + e^{2x}} \times e^x \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right) - \frac{e^x}{1 + e^{2x}}. \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad \text{donc} \quad \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2.$$

D'où :

$$\frac{1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2} = \frac{4e^x}{2(e^{2x} + 1)} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

Donc :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} - \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = 0.$$

(b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c$$

F est constante sur \mathbb{R} , i.e.

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = c.$$

$$\arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x) = c$$

$$\arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c$$

(c) Déterminer la valeur de c .

En $x = 0$, on a :

$$F(0) = \arctan(\operatorname{th}(0)) - \arctan(1) = \arctan(0) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\boxed{c = -\frac{\pi}{4}}$$

15. *Enoncé :*

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$$

On a :

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x).$$

Alors :

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{ch}(2x)} = \frac{2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)}.$$

En divisant par $\operatorname{ch}^2(x)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(2x) &= \frac{2 \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}}{1 + \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)^2} \\ &= \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}. \end{aligned}$$

et en déduire que si $x \neq 0$,

$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

On a :

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)},$$

Comme $x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{th}(2x) \neq 0$:

$$\frac{1}{\operatorname{th}(2x)} = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x)}{2 \operatorname{th}(x)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} &= \frac{2(1 + \operatorname{th}^2(x))}{2 \operatorname{th}(x)} = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x)}{\operatorname{th}(x)}, \\ \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} &= \frac{1 + \operatorname{th}^2(x)}{\operatorname{th}(x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \frac{\operatorname{th}^2(x)}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x). \end{aligned}$$

(b) Soit $a > 0$; calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a)$$

En utilisant l'identité précédente et en posant $\forall k \in \mathbb{N}, x = 2^k a$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 2^k \operatorname{th}(2^k a) = \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1} a)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k a)}.$$

En sommant de $k = 0$ à n , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1} a)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k a)} \right) \\ &= \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1} a)} - \frac{1}{\operatorname{th}(a)}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a) = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1} a)} - \frac{1}{\operatorname{th}(a)}}$$

► Puissance

16. *Enoncé* : Simplifier l'expression suivante, en précisant pour quelles valeurs de x elle a un sens :

$$x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$$

Pour que l'expression $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ ait un sens, il faut que $x > 1$.

Et donc :

$$\begin{aligned} \forall x > 1, \quad x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} &= e^{\ln(x) \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}} \\ &= e^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \cdot \ln(x)} \\ &= e^{\ln(\ln(x))} \\ &= \ln(x). \end{aligned}$$

17. *Énoncé : Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :*

(a) Pour $a > 0, x \mapsto x^a$

Posons $f_a : x \mapsto x^a$ ($a > 0$).

$$\forall x > 0, f'_a(x) = a x^{a-1} > 0 \text{ (car } a > 0 \text{)}.$$

f_a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(b) Pour $x \in]0, 1[, a \mapsto x^a$.

Posons $g_x : a \mapsto x^a$ ($x \in]0, 1[$).

$$g'_x(a) = x^a \ln x \quad (\ln x < 0 \text{ car } 0 < x < 1).$$

$$g'_x(a) < 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

g_x est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

18. *Énoncé : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.*

Pour que les puissances soient définies, il faut

$$x > 0 \quad (\text{ainsi } \sqrt{x} > 0).$$

En passant au logarithme népérien :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^x &= x^{\sqrt{x}} \\ x \ln(\sqrt{x}) &= \sqrt{x} \ln(x) \\ x \left(\frac{1}{2} \ln x\right) &= \sqrt{x} \ln x \\ \frac{1}{2} x \ln x &= \sqrt{x} \ln x. \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln x \left(\frac{1}{2} x - \sqrt{x}\right) = 0.$$

Deux possibilités :

$$\ln x = 0, \quad \boxed{x = 1}.$$

$$\boxed{\frac{1}{2} x - \sqrt{x} = 0} \iff \frac{1}{2} x = \sqrt{x} \iff x = 2\sqrt{x} \iff x^2 = 4x \iff x(x - 4) = 0.$$

Comme $x > 0$, on retient $x = 4$.

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4}$$

19. *Enoncé* : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

(a) $2^x + 3^x = 5$;

Posons $f : x \mapsto 2^x + 3^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 > 0,$$

d'où f est strictement croissante. Comme $f(1) = 5$, l'unique solution est

$$\boxed{x = 1}.$$

(b) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

$$9^x = 3^{2x}, \quad 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^x 2^{1/2}, \quad 3^{2x-1} = \frac{3^{2x}}{3}.$$

$$3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - \frac{3^{2x}}{3}$$

$$3^{2x} + \frac{3^{2x}}{3} = 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{7}{2}}$$

$$4 \times 3^{2x-1} = 9 \times 2^{x+\frac{1}{2}}$$

$$2^2 \times 3^{2x-1} = 3^2 \times 2^{x+\frac{1}{2}}$$

$$3^{2x-3} = 2^{x-\frac{3}{2}}$$

En passant au logarithme népérien

$$(2x - 3) \ln(3) = (x - \frac{3}{2}) \ln(2)$$

$$2x \ln(3) - 3 \ln(3) = x \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(2)$$

$$x(2 \ln(3) - \ln(2)) = 3 \ln(3) - \frac{3}{2} \ln(2)$$

$$x(2 \ln(3) - \ln(2)) = \frac{3}{2}(2 \ln(3) - \ln(2))$$

Donc

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}.$$

La fonction $f : x \mapsto 9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ étant strictement monotone, cette solution est unique.

20. *Enoncé* : Établir que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

$$g(x) = \ln(x^x(1-x)^{1-x}) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x), \quad x \in]0, 1[.$$

$$g'(x) = \ln x - \ln(1-x), \quad g'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

$$g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ est convexe,}$$

donc $x = \frac{1}{2}$ est le *minimum* de g sur $]0, 1[$.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2}, \quad \implies \quad g(x) \geq \ln \frac{1}{2}.$$

En exponentiant :

$$\boxed{x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2} \quad (0 < x < 1),}$$

avec égalité seulement pour $x = \frac{1}{2}$.

► Approfondissement

21. *Énoncé* : Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer le nombre le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = a$$

22. *Énoncé* : Déterminer la valeur maximale de $\sqrt[n]{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$. Pour x réel supérieur ou égal à 1, posons alors

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$ et donc f croît sur $[1, e]$ puis décroît. En particulier, pour $n \geq 3$, on a $f(n) \leq f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\sqrt[n]{n} = e^{f(n)} \leq e^{f(3)} = \sqrt[3]{3} \cong 1,44\dots$$

Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1} = 1$ et $\sqrt{2} \cong 1,41\dots$, pour tout entier naturel non nul, on a $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$. De fait $\sqrt[3]{3} \cong 1,44\dots$ est la valeur recherchée.

23. *Énoncé* : Formule de Machin. Démontrer que :

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Notons

$$\alpha = \arctan(1/5) \text{ et } \beta = \arctan(1/239)$$

D'après les variations de l'arc tangente, on sait que $0 \leq \alpha \leq 1/5$ et $0 \leq \beta \leq \alpha$, ainsi

$$0 \leq 3\alpha \leq 4\alpha - \beta \leq \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$$

Et donc :

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(4\alpha)\tan(\beta)}$$

Posons $u = \tan(4\alpha)$. On a alors,

$$u = \frac{2v}{1 - v^2}$$

où

$$v = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}$$

donc

$$u = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

D' où

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{u - 1/239}{1 + u/239} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

Et puisque $4\alpha - \beta \in [0, \pi/2]$, $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, d'où le résultat en multipliant par 4.

24. *Énoncé : Comparer, pour $x \in \mathbb{R}$, les quantités $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$.*

Posons $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = -2 \sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

De plus,

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin x - \cos x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Or $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \pi$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 < \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

On en déduit que $\sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ne sont jamais nuls quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f ne s'annule jamais. Comme elle est continue, elle est de signe constant. Or $f(0) = 1 - \sin(1) > 0$ donc $f > 0$ sur \mathbb{R} . Par conséquent, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

25. *Énoncé* : Trouver tous les couples $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $2 \leq p < q$ et $p^q = q^p$.

Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $p < q$. On a alors,

$$p^q = q^p \Leftrightarrow q \ln(p) = p \ln(q) \Leftrightarrow \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(q)}{q}$$

Soit f est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \ln(x)/x$. Après une étude sans difficulté, on prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Par suite, si p et q sont tous deux dans $[e, +\infty[$ on a $f(p) \neq f(q)$ et le couple (p, q) n'est pas solution. Ceci implique que $p = 2$. L'équation $2^q = q^2$ ayant au plus une solution dans l'intervalle $[e, +\infty[$, cherchons cette éventuelle solution. Comme $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, puis $2^4 = 16 = 4^2$. Donc $q = 4$ convient et il existe un et un seul couple solution, le couple $(2, 4)$.