

TD 4

Approfondissements

22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$. Pour x réel supérieur ou égal à 1, posons alors $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
 f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$ et donc f croît sur $[1, e]$ puis décroît. En particulier, pour $n \geq 3$, on a $f(n) \leq f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\sqrt[n]{n} = e^{f(n)} \leq e^{f(3)} = \sqrt[3]{3} \cong 1,44\dots$$

Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1} = 1$ et $\sqrt{2} \cong 1,41\dots$, pour tout entier naturel non nul, on a $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$. De fait $\sqrt[3]{3} \cong 1,44\dots$ est la valeur recherchée.

23. Notons

$$\alpha = \arctan(1/5) \text{ et } \beta = \arctan(1/239)$$

D'après les variations de l'arc tangente, on sait que $0 \leq \alpha \leq 1/5$ et $0 \leq \beta \leq \alpha$, ainsi

$$0 \leq 3\alpha \leq 4\alpha - \beta \leq \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$$

Et donc :

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(4\alpha)\tan(\beta)}$$

Posons $u = \tan(4\alpha)$. On a alors,

$$u = \frac{2v}{1 - v^2}$$

où

$$v = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}$$

donc

$$u = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

D'où

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{u - 1/239}{1 + u/239} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

Et puisque $4\alpha - \beta \in [0, \pi/2]$, $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, d'où le résultat en multipliant par 4.

24. Posons $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = -2 \sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

De plus,

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin x - \cos x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Or $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} < \pi$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$0 < \frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

On en déduit que $\sin\left(\frac{\sin x - \cos x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ne sont jamais nuls quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction f ne s'annule jamais. Comme elle est continue, elle est de signe constant. Or $f(0) = 1 - \sin(1) > 0$ donc $f > 0$ sur \mathbb{R} . Par conséquent, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

25. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $p < q$. On a alors,

$$p^q = q^p \Leftrightarrow q \ln(p) = p \ln(q) \Leftrightarrow \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(q)}{q}$$

Soit f est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \ln(x)/x$. Après une étude sans difficulté, on prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Par suite, si p et q sont tous deux dans $[e, +\infty[$ on a $f(p) \neq f(q)$ et le couple (p, q) n'est pas solution. Ceci implique que $p = 2$. L'équation $2^q = q^2$ ayant au plus une solution dans l'intervalle $[e, +\infty[$, cherchons cette éventuelle solution. Comme $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, puis $2^4 = 16 = 4^2$. Donc $q = 4$ convient et il existe un et un seul couple solution, le couple $(2, 4)$.