

## FONCTIONS USUELLES

## ► Trigonométrie circulaire

1. Soient  $p, q \in \mathbb{R}$ ; démontrer que :

$$(a) \quad \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right); \quad (c) \quad \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

$$(b) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right); \quad (d) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; montrer que  $\cos(3a) = 4 \cos^3(a) - 3 \cos(a)$ .

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(a) \quad \sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}; \quad (c) \quad \sin(x) = \sin(4x);$$

$$(b) \quad \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}; \quad (d) \quad \sin(x) = \cos(3x).$$

4. Simplifier, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(\arctan(x))$  et  $\sin(\arctan(x))$ .

5. Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x$  (*attention au domaine de définition...*) :

$$(a) \quad \arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right); \quad (c) \quad \arccos(x) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$(b) \quad \arcsin(x) = \arctan(2x); \quad (d) \quad \arcsin(2x) = \arctan(x).$$

6. Déterminer l'ensemble  $E = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \cos(\theta) \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \right\}$ .

7. Démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

8. Soit  $x \in ]-\pi, \pi[$  et soit  $t = \tan(x/2)$ . Établir les formules suivantes :

$$(a) \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$(b) \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$(c) \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \text{ si } x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

9. Tracer les graphes des fonctions  $\arcsin \circ \sin$  et  $\arccos \circ \cos$ .

## ► Trigonométrie hyperbolique

10. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ; démontrer que :

$$(a) \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y);$$

$$(b) \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

11. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ ; montrer que :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)+1}{2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{2}}.$$

12. Soit  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ; on pose  $t = \tan(\theta/2)$  et  $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ .

$$(a) \quad \text{Démontrer que } x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

(b) En déduire une expression de  $\operatorname{ch}(x)$ ,  $\operatorname{sh}(x)$  et  $\operatorname{th}(x)$  à l'aide de  $\cos(\theta)$ ,  $\sin(\theta)$  et  $\tan(\theta)$ .

(c) Exprimer  $\theta$  en fonction de  $x$ .

13. Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 0$ , calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(ka + b) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(ka + b).$$

14. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction  $x \mapsto \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$ .  
 (b) En déduire qu'il existe un réel  $c$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c.$$

Déterminer la valeur de  $c$ .

15. (a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$$

et en déduire que si  $x \neq 0$ ,

$$\frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

- (b) Soit  $a > 0$ ; calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k a).$$

## ► Puissances

16. Simplifier l'expression suivante, en précisant pour quelles valeurs de  $x$  elle a un sens :

$$\frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)}.$$

17. Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :

(a) pour  $a > 0$ ,  $x \mapsto x^a$ ; (b) pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $a \mapsto x^a$ .

18. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ .

19. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

(a)  $2^x + 3^x = 5$ ; (b)  $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ .

20. Établir que :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

## ► Approfondissements

21. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; déterminer le nombre le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = a.$$

22. Déterminer la valeur maximale de  $\sqrt[n]{n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

23. *Formule de Machin*. Démontrer que :

$$\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

24. Comparer, pour  $x \in \mathbb{R}$ , les quantités  $\cos(\sin(x))$  et  $\sin(\cos(x))$ .

25. Trouver tous les couples  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que  $2 \leq p < q$  et  $p^q = q^p$ .