

ENSEMBLES, MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

► Compléments calculatoires

1. *Énoncé* : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b} &\leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ (\sqrt{a+b})^2 &\leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \text{ car } a \text{ et } b > 0 \\ a+b &\leq a+2\sqrt{ab}+b \\ 0 &\leq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

(b) En déduire que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Posons 2 cas :

Cas n°1 : $a > b$

Cas n°2 : $a < b$

$$\begin{array}{ll} |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|} & |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b} & \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} \\ a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b & b - 2\sqrt{ab} + a \leq b - a \\ \sqrt{ab} \geq b & \sqrt{ab} \geq a \\ 0 \geq b^2 - ab & 0 \geq a^2 - ab \\ 0 \geq b(b-a) & 0 \geq a(a-b) \end{array}$$

Résultat cohérent : $b - a$ négatif par hyp. Résultat cohérent : $a - b$ négatif par hyp.

2. *Énoncé* : Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes :

(a) $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$;

Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sqrt{|x-3|} = |x-1|$$

alors :

$$|x-3| = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad (*)$$

Car si $x \geq 3$:

$$|x-3| = x-3$$

et (*) devient :

$$\begin{aligned}x-3 &= x^2 - 2x + 1 \\ \text{i.e } 0 &= x^2 - 3x + 4\end{aligned}$$

Ce trinôme a pour discriminant :

$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$

Il n'y a pas de solution Réelle. On doit donc avoir $x < 3$:

$$|x - 3| = 3 - x$$

et (*) devient donc :

$$\begin{aligned} 3 - x &= x^2 - 2x + 1 \\ \text{i.e } 0 &= x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

x est donc égal à :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1 \text{ ou } 2$$

Synthèse : On vérifie : $\begin{cases} \sqrt{|2-3|} = |2-1| \text{ ok.} \\ \sqrt{|1-3|} = |-1-1| \text{ ok.} \end{cases}$

(b) $\sqrt{|x-3|} \leq |x-1|$;

On peut réutiliser le travail effectué précédemment.

Pour $x \geq 3$:

Le trinôme $x^2 - 3x + 4$ est donc toujours positif. On a donc $S_1 = [3, +\infty[$

Pour $x < 3$:

Le trinôme $x^2 - x - 2$ est positif sur $] -\infty; -1]$ et $[2; +\infty[$. On a donc $S_2 =] -\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.

Donc $x \in] -\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

(c) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$.

Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

Cette inéquation existe, si $x+1$ et $x+2$ sont du même signe. $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad (1) \text{ ou}$

$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \leq -2 \end{cases} \quad (2) \text{ Donc } x \in \underbrace{]-\infty; -2[}_{\text{Cas n}^\circ 1} \cup \underbrace{]-1; +\infty[}_{\text{Cas n}^\circ 2}$

Si :

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$$

Alors :

$$\left| \frac{x+1}{x+2} \right| \leq \left| \frac{x+2}{x+1} \right|$$

Donc :

$$\frac{x+1}{x+2} \leq \frac{x+2}{x+1}$$

$$\text{i.e : } (x+1)^2 \leq (x+2)^2$$

Cas n°1 : Si $x \leq 2$, Alors par décroissance de $x \mapsto x^2$:

$$(x+2)^2 < (x+1)^2$$

Cas n°2 : On a : $(x+1) < (x+2)$ ok.

Donc : $x \in]-1; +\infty[$

3. *Enoncé : Inégalité arithmético-géométrique. Démontrer que :*

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

On pose :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 \\ a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0 \\ a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

4. *Enoncé : Démontrer que pour tous réels x et y , on a :*

$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |y - 1|)(1 + |x - 1|).$$

On sait que : $|xy - 1| = \max(xy - 1, 1 - xy)$

Majorons donc $1 + |xy - 1|$:

Cas n°1 : $xy \geq 1$

il faut donc que x et y soit du même signe. On a donc : $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq -1 \end{cases}$ (2)

Pour 1, on a :

$$\begin{aligned} 1 + |xy - 1| &\leq (1 + |y - 1|)(1 + |x - 1|) \\ xy &\leq xy \end{aligned}$$

Et pour 2 :

$$\begin{aligned} 1 + |xy - 1| &\leq (1 + |y - 1|)(1 + |x - 1|) \\ xy &\leq (2 - y)(2 + y) \\ xy &\leq 4 - 2x - 2y + xy \\ 0 &\leq 2 - x - y \end{aligned}$$

Pour la 1, la condition est immédiate. Pour la 2, cela est cohérent car x et y sont négatif.

Cas n°2 : $xy \leq 1$

On doit donc avoir x et y de signe opposés. On a donc : $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \leq -1 \end{cases}$ (2)

On remarque que (1) et (2) sont symétrique, il n'y a donc qu'à en démontrer une. Prenons le cas (1)

$$\begin{aligned} 1 + |xy - 1| &\leq (1 + |y - 1|)(1 + |x - 1|) \\ 2 - xy &\leq (y)(2 - x) \\ 2 &\leq 2y \\ 1 &\leq y \end{aligned}$$

La condition est donc vérifiée. L'inégalité est donc vérifiée.

5. *Enoncé* : Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$:

i.e :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ Avec } p \text{ et } q \text{ co-premiers}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

Or (à démontrer) : si n^2 pair $\iff n$ pair

Donc $\exists k_p \in \mathbb{Z}, p = 2k_p$:

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (2k_p)^2 \\ 2q^2 &= 4k_p^2 \\ q^2 &= 2k_p^2 \end{aligned}$$

Soit, $\exists k_q \in \mathbb{Z}, q = 2k_q$

La fraction $\frac{p}{q}$ n'est donc plus irréductible, car le numérateur et le dénominateur ont le facteur 2 en commun. Cela est donc absurde. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que : $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \in \mathbb{Q}$ Comme précédemment :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \text{ Avec } p \text{ et } q \text{ co-premiers}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(2)}{\ln(3)} &= \frac{p}{q} \\ q \ln(2) &= p \ln(3) \\ 2^q &= 3^p \end{aligned}$$

Cela est donc absurde car 3 est impaire et 2 est paire. Donc $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$

► Bornes

6. *Enoncé : Étudier l'existence puis déterminer les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :*

- (a) $A = \left\{ 1 - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
- (b) $B = \left\{ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid (m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\}$;
- (c) $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n \right\}$;
- (d) $D = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2} \mid (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
- (e) $E = \left\{ \frac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
- (f) $F = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \mid (n, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
- (g) $G = \left\{ \frac{mn}{m^2+mn+n^2} \mid (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
- (h) $H = \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} \mid x \in [1, \infty[\right\}$.

Correction :

- (a) $A = \left\{ 1 - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$;

Soit $a \in A$, i.e :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } a = 1 - \frac{2}{n}$$

Donc

$$\begin{aligned} -2 &\leq -\frac{2}{n} \leq 0 \\ -1 &\leq a \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} -1 \text{ minore } A \\ -1 = 1 - \frac{2}{1} \in A \end{cases} \quad \text{Donc : } -1 = \min(A) = \inf(A)$$

1 majore A . On pose $\forall k \geq 0$:

$$a_k = 1 - \frac{2}{k+1} \in A$$

On a : $a_k \rightarrow 1$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne supérieur :
 $1 = \sup(A)$

- (b) $B = \left\{ 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \mid (m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\}$;

Soit $b \in B$, i.e :

$$\exists (m, n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \text{ tq } b = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

Donc

$$\begin{aligned} -1 &\leq -\frac{1}{m} \leq 1 \quad (1) \\ -1 &\leq -\frac{1}{n} \leq 1 \quad (2) \\ -2 &\leq -\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq 2 \quad (1+2) \\ -1 &\leq b \leq 3 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} -1 &= 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in B \\ 3 &= 1 - \frac{1}{-1} - \frac{1}{-1} \in B \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} -1 &= \min(B) \\ 3 &= \max(B) \end{cases}$$

(c) $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n \right\};$

Soit $c \in C$, i.e :

$$\exists (m, n) \in (\mathbb{Z})^2 \text{ tq } c = 1 - \frac{1}{n-m}$$

Donc

$$\begin{aligned} -1 &\leq -\frac{1}{n+m} \leq 1 \\ 0 &\leq c \leq 2 \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} 0 = 1 - \frac{1}{2-1} \in C \\ 2 = 1 - \frac{1}{1-2} - \frac{1}{-1} \in C \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} 0 = \min(C) \\ 2 = \max(C) \end{cases}$

(d) $D = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2} \mid (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\};$

Soit $d \in D$, i.e :

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tq } d = \frac{pq}{p^2+q^2}$$

On a : $d > 0$

On pose : $(p-q)^2 \geq 0$, Donc :

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - 2pq &\geq 0 \\ pq &\leq \frac{p^2 + q^2}{2} \\ d &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De plus $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{1^2+1^2} \in D$, Donc $\frac{1}{2} = \max(D)$

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$U_n = \frac{n \times 1}{n^2 + 1^2}$$

$U_n \rightarrow 0$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $0 = \inf(D)$

(e) $E = \left\{ \frac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\};$

Soit $e \in E$, i.e :

$$\exists (m, n) \in (\mathbb{N})^2 \text{ tq } e = \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2^n \leq +\infty \\ 2 &\leq 2^n + 3^{m+n} \leq +\infty \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2^n + 3^{m+n}} \geq 0 \\ 2^{n-1} &\geq e \geq 0 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} e \geq 0 \\ \forall k \geq 0, U_k = \frac{2^k}{2^k+3^k} \in E \end{cases}$$

$U_k \rightarrow 0$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $0 = \inf(E)$

Pour $k \geq 0$, On pose : $e = U_k = \frac{2^k}{2^m + 3^{m+k}} \in E$

Étudions la variations de la suite :

$$\begin{aligned}
 U_{k+1} - U_k &= \frac{2^{k+1}}{2^m + 3^{m+k+1}} - \frac{2^k}{2^m + 3^{m+k}} \\
 &= \frac{2^{k+1}(2^m + 3^{m+k}) - 2^k(2^m + 3^{m+k+1})}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^k(2 \times 2^m + 2 \times 3^{m+k} - 2^m - 3^{m+k+1})}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^k(2^{m+1} - 2^m + 2 \times 3^{m+k} - 3^{m+k+1})}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^k(2^m(2-1) + 3^{m+k}(2-3))}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^k(2^m - 3^{m+k})}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^{m+k} - 2^k \times 3^{m+k}}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \\
 &= \frac{2^{m+k} - 6^k \times 3^m}{(2^m + 3^{m+k+1})(2^m + 3^m + k)} \leq 1
 \end{aligned}$$

Donc $\forall k \geq 0, U_k \leq 0$

Or $e = U_k$, Donc $e \leq U_0 = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} = U_0 \in E$.

Donc $\frac{1}{2} = \max(E)$

(f) $F = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \mid (n, q) \in \mathbb{N}^2 \right\};$

Soit $f \in F$, i.e :

$$\exists (n, q) \in (\mathbb{N})^2 \text{ tq } f = \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 1 &< \frac{n+2}{n+1} \leq 2 \\
 -1 &\leq \frac{q-1}{q+1} < 1 \\
 0 &< \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} < 3
 \end{aligned}$$

Posons $q = 0$: Alors :

$$\begin{cases} f > 0 \\ \forall k \geq 0, U_k = \frac{n+2}{n+1} - 1 \in F \end{cases}$$

$U_k \rightarrow 0$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $0 = \inf(F)$

Posons $n = 0$: Alors :

$$\begin{cases} f > 0 \\ \forall k \geq 0, U_k = 2 + \frac{q-1}{q+1} \in F \end{cases}$$

- $U_k \rightarrow 3$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne supérieur, $3 = \max(F)$
- (g) $G = \left\{ \frac{mn}{m^2+mn+n^2} \mid (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
 Soit $g \in G$, i.e :

$$\exists (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tq } g = \frac{mn}{m^2 + mn + n^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (m - n)^2 &\geq 0 \\ m^2 - 2mn + n^2 &\geq 0 \\ m^2 + mn + n^2 &\geq 3mn \\ 0 < \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{1^2 \times 1 \times 1 \times 1^2} \in G$, Donc $\frac{1}{3} = \max(G)$
 Posons $m = 1$: Alors :

$$\begin{cases} g > 0 \\ \forall k \geq 0, U_k = \frac{n}{1+n+n^2} \in G \end{cases}$$

- $U_k \rightarrow 0$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne inférieur, $0 = \inf(G)$
- (h) $H = \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} \mid x \in [1, \infty[\right\}$.
 Soit $h \in H$, i.e :

$$\exists x \in [1, \infty[\text{ tq } h = 1 - \frac{1}{x^3}$$

Or : $0 = 1 - \frac{1}{1^3} \in H$, Donc $0 = \inf(H)$
 Alors :

$$\begin{cases} h > 0 \\ \forall k \geq 0, U_k = 1 - \frac{1}{x^3} \in H \end{cases}$$

$U_k \rightarrow 1$, Donc par caractérisation séquentielle de la borne supérieur, $1 = \max(G)$

7. *Enoncé* : Soient A, B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $B \subset A$. Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :

$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A).$$

On a : $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$ non vides tel que : $B \subset A$.
 Dans $\overline{\mathbb{R}}$, les bornes existent et comme $B \neq \emptyset$, on a :

$$\inf(B) \leq \sup(B)$$

$$\begin{cases} A \supset B \\ \sup(A) \text{ majore } A \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} \sup(A) \text{ majore } B \\ \sup(B) \text{ est le plus petit majorant de } B \end{cases}$$

Donc :

$$\sup(B) \leq \sup(A)$$

Par même raisonnement, on retrouve aisément le résultat recherché.

8. *Enoncé* : Soient A et B deux parties non vides et bornées de \mathbb{R} telles que $\forall(x, y) \in A \times B, x < y$. Que peut-on dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?

On a : $\forall(x, y) \in A \times B, x < y$.

Fixons $y_0 \in B$

Alors $\forall x \in A, y_0 > x$, Donc $y_0 \geq \sup(A)$

$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \text{ majore } A \\ \sup(A) \text{ est le plus petit des majorant de } A \end{array} \right.$

y_0 était quelconque.

Donc on a :

$$\forall y \in B, y \geq \sup(A)$$

Donc : $\left\{ \begin{array}{l} \sup(A) \text{ minore } B \\ \inf(B) \text{ est le plus grand minorant de } B \end{array} \right.$

Donc on a :

$$\sup(A) \leq \inf(B)$$

9. *Enoncé* : Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . On pose $A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}$. Démontrer que $A + B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

Si $z \in A + B$, Alors $\exists(x, y) \in A \times B$ tq $z = x + y$

Or $\left\{ \begin{array}{l} x \leq \sup(A) \\ y \leq \sup(B) \end{array} \right.$ Donc $z \leq \sup(A) + \sup(B)$

Donc $\sup(A) + \sup(B)$ majore $A + B$

$\sup(A)$ existe, donc il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left\{ \begin{array}{l} a_n \rightarrow \sup(A) \\ \forall n \geq 0, a_n \in A \end{array} \right.$

$\sup(B)$ existe, donc il existe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \left\{ \begin{array}{l} b_n \rightarrow \sup(B) \\ \forall n \geq 0, b_n \in B \end{array} \right.$

On pose :

$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 0 \\ x_n = a_n + b_n \in A + B \end{array} \right.$, Alors : $x_n \rightarrow \sup(A) + \sup(B)$

Donc par caractérisation séquentiel, il en vient :

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

10. *Enoncé* : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$. Étudier les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $A = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in [a, b] \right\}$.

$\forall x, y \in [a, b], \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array} \right.$ Donc $\left\{ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \right.$ Donc $\left\{ \frac{a}{b} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{a} \right.$ Enfin $\left\{ \begin{array}{l} \max(A) = \frac{b}{a} \\ \min(A) = \frac{a}{b} \end{array} \right.$

11. *Enoncé* : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On pose $A = \{x \in [0, 1] \mid x \leq f(x)\}$.

- (a) Démontrer que pour tout $x \in A$, on a également $f(x) \in A$.
 (b) Montrer que A admet une borne supérieure a et que $f(a) \geq a$.
 (c) En déduire que $f(a) = a$.

12. *Enoncé* : Soit A une partie non vide et bornée de \mathbb{R} . On pose $B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$.

- (a) Démontrer que B est non vide et bornée.

$A \neq \emptyset$ donc $\exists a \in A$ et $\inf(A) \leq \sup(A)$

Et alors $0 = |a - a| \in B$

Soit $z \in \mathbb{R}$ Alors $\exists x, y \in A, z = |x - y|$

$$\begin{cases} z > 0 \\ z = |x - y| \end{cases}$$

Quitte à échanger les rôles de x et y , on peut supposer que $x \geq y$

Donc $z = x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$

Car $\begin{cases} x \leq \sup(A) \\ y \geq \inf(A) \end{cases}$, et donc $-y \leq -\inf(A)$

Donc B est borné.

- (b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.

B est bornée, donc $\begin{cases} 0 \text{ minore } B \\ 0 \in B \end{cases}$ Donc $\begin{cases} 0 = \min(A) \\ = \inf(B) \end{cases}$

- (c) Démontrer que B admet une borne supérieure vérifiant $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

$\sup(A) - \inf(A)$ majore B

$\sup(A) = \sup(A)$ Donc par caractérisation séquentielle, il existe : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} x_n \rightarrow \sup(A) \\ \forall n \geq 0, x_n \in A \end{cases}$

$\inf(A) = \inf(A)$ Donc par caractérisation séquentielle, il existe : $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} y_n \rightarrow \inf(A) \\ \forall n \geq 0, y_n \in A \end{cases}$

$\forall n \geq 0$, on pose :

$$z_n = |x_n - y_n| \in B$$

Alors $z_n \rightarrow |\sup(A) - \inf(A)| = \sup(A) - \inf(A)$

Donc par Caractérisation séquentielle :

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$$

► Partie entière

13. *Enoncé* : Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la quantité $[x] + [-x]$.

Cas n°1 : x est un entier relatif.

$$\begin{aligned} [x] &= n \\ [-x] &= -n \\ [x] + [-x] &= 0 \end{aligned}$$

Cas n°2 : x est quelconque :

$$\begin{aligned} n &\leq [x] < n + 1 \\ -n - 1 &\leq [-x] < -n \\ [x] + [-x] &= n + (-n - 1) = -1 \end{aligned}$$

14. *Énoncé* : On considère la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - [x]|.$$

(a) Tracer l'allure du graphe de f sur $[-3, 3]$.

On pose : $E = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$, on a :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1 \\ U_n = 1 - \frac{1}{n} = u_n - [u_n] \in E \end{cases}$$

On a : $U_n \rightarrow 1$ et 1 majore E . Donc $1 = \sup(E)$

(b) Déterminer les antécédents de 0 par f .

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} [x] &\leq x \\ x - [x] &\geq 0 \\ |x - [x]| &= x - [x] \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\begin{aligned} x - [x] &= 0 \\ x &= [x] \\ x &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x + 1 &\leq [x] + 1 < x + 1 \\ [x + 1] &= [x] + 1 \end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= |x+1 - [x] - 1| \\ f(x+1) &= |x - [x]| = f(x) \end{aligned}$$

(d) Démontrer que $\sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$.

15. *Enoncé* : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Soit :

$$\begin{cases} \delta_x = x - \lfloor x \rfloor \\ \delta_y = y - \lfloor y \rfloor \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 2x &= 2(\lfloor x \rfloor + \delta_x) \\ &= 2\lfloor x \rfloor + 2\delta_x \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor &= \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2\delta_x \rfloor \\ &= 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\delta_x \rfloor \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \lfloor 2\delta_x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{Si } \delta_x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{Si } \delta_x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Donc :

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor & \text{Si } \delta_x, \delta_y < \frac{1}{2} \\ 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1 & \text{Si } \delta_x \text{ ou } \delta_y \geq \frac{1}{2} \\ 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2 & \text{Si } \delta_x, \delta_y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Or :

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \delta_x + \delta_y \rfloor$$

Donc :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor \delta_x + \delta_y \rfloor$$

δ_x/δ_y	$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor$	$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$
$\delta_x, \delta_y < \frac{1}{2}$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 0$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor$
$\begin{cases} \delta_x \geq \frac{1}{2} \text{ et} \\ \delta_y < \frac{1}{2} \text{ ou l'inverse} \end{cases}$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \underbrace{?}_{\leq 1}$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1$
$\delta_x, \delta_y \geq \frac{1}{2}$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \underbrace{?}_{\leq 2}$	$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 2$

16. *Enoncé* : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1.$$

Encadrons $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$:

On a :

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

et :

$$\begin{aligned} x - 1 &< \lfloor x \rfloor \leq x \\ n(x - 1) &< n\lfloor x \rfloor \leq nx \\ -nx &\leq -n\lfloor x \rfloor < -n(x - 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$-1 < [nx] - n[x] < n$$

Comme : $[nx] - n[x] \in \mathbb{Z}$, On a :

$$0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1$$