TD 3

4. En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy-1| \leq |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1|$$

On remarque alors que

$$xy - 1 = (x-1)(y-1) + x - 1 + y - 1$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy-1| \leq |(x-1)(y-1)| + |x-1| + |y-1|$$

d'où le résultat.

15. Posons $d_x = x - \lfloor x \rfloor$ $d_y = y - \lfloor y \rfloor$ et remarquons que l'on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + d_x + d_y \ .$$

- **Si $d_x, d_y \leq 1/2$:** dans ce cas on a
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$
et donc
$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$
par encadrement entre deux entiers successifs.
- **Si d_x ou d_y est strictement supérieur à $1/2$ (mais pas les deux) :** on démontre de la même façon que
$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \ .$$
- **Si $d_x, d_y > 1/2$:**on montre par encadrement que
$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \ .$$

Dans tous les cas, l'inégalité annoncée est vérifiée (remplacer $\lfloor x + y \rfloor$ par son expression).