Nombres réels

▶ Compléments calculatoires

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
   (b) En déduire que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :
   (a) $\sqrt{|x-3|} = |x-1|$; (b) $\sqrt{|x-3|} \leq |x-1|$; (c) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} \leq \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$.
3. *Inégalité arithmético-géométrique.* Démontrer que :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$
4. Démontrer que pour tous réels x et y on a :
$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |y-1|)(1 + |x-1|)\,.$$
5. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$..

▶ Bornes

6. Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :
   (a) $\mathscr{A} = \left\{ 1 - \dfrac{2}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
   (b) $\mathscr{B} = \left\{ 1 - \dfrac{1}{m} - \frac{1}{n} \;\middle|\; (m,n) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\}$;
   (c) $\mathscr{C} = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n-m} \;\middle|\; (m,n) \in \mathbb{Z}^2, m \neq n \right\}$;
   (d) $\mathscr{D} = \left\{ \dfrac{pq}{p^2+q^2} \;\middle|\; (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
   (e) $\mathscr{E} = \left\{ \dfrac{2^n}{2^m + 3^{n+m}} \;\middle|\; (m,n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
   (f) $\mathscr{F} = \left\{ \dfrac{n+2}{n+1} + \dfrac{q-1}{q+1} \;\middle|\; (n,q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$;
   (g) $\mathscr{G} = \left\{ \dfrac{mn}{m^2+mn+n^2} \;\middle|\; (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$;
   (h) $\mathscr{H} = \left\{ 1 - \dfrac{1}{x^3} \;\middle|\; x \in [1, \infty[\right\}$.
7. Soient A, B deux parties non vides de $\overline{\mathbb{R}}$ telles que $B \subset A$. Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :
$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)\,.$$
8. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in A \times B, \quad x < y\,.$$
   Que dire des quantités $\inf(B)$ et $\sup(A)$?
9. Soient A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose
$$A + B = \{x + y \,|\, (x,y) \in A \times B\}\,.$$
   Démontrer que $A+B$ admet une borne supérieure vérifiant $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
10. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$; étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble
$$A = \left\{ \frac{x}{y} \;\middle|\; x, y \in [a,b] \right\}\,.$$
11. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. On pose
$$A = \{x \in [0,1] \,|\, x \leq f(x)\}\,.$$
   (a) Démontrer que pour tout $x \in A$ on a également $f(x) \in A$.

(b) Montrer que A admet une borne supérieure a et que $f(a) \geq a$.
(c) En déduire que $f(a) = a$.

12. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose
$$B = \{|x-y| \mid x, y \in A\} .$$
(a) Démontrer que B est non vide et bornée.
(b) Montrer que B admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
(c) Démontrer que B admet une borne supérieure vérifiant $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

▶ Partie entière

13. Soit $x \in \mathbb{R}$; étudier la quantité $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
14. On considère la fonction suivante :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x - \lfloor x \rfloor| \,. \end{aligned}$$
(a) Tracer l'allure du graphe de f sur $[-3, 3]$.
(b) Déterminer les antécédents de 0 par f.
(c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$.
(d) Démontrer que $\sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$.
15. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
16. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$$

▶ Approfondissements

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor .$$
18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor .$$
19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.
(a) Montrer que $s_n \leq 9\,(\log(n) + 1)$.
(b) Montrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_n$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?
20. *Irrationalité de e.* Pour $n \geq 2$, on définit une fonction
$$gx \mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
sur $[0, 1]$. On pose également, pour $x \in [0, 1]$, $h(x) = g(x) + e^{-x} \dfrac{x^n}{n!}$.
(a) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e .$$
(b) Montrer que h est strictement croissante sur $[0, 1]$. En déduire que
$$e < \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) + \frac{1}{n!} .$$
(c) On suppose que e est rationnel. Il existe donc deux entiers naturels p, q tels que $e = \dfrac{p}{q}$. Montrer par l'absurde que $q > n$. Conclure.