Rappels et compléments calculatoires

▶ Fonctions d'une variable réelle

1. *Enoncé : Faire l'étude des fonctions listées ci-dessous sur leurs ensembles de définition respectifs. Par « faire l'étude », on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, etc.), et tracer l'allure de la courbe.*

   (a) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$
   (b) $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$
   (c) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x)$
   (d) $i : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$
   (e) $j : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$
   (f) $k : x \mapsto \exp(\log(3x)^2)$.

   (a)

$$f(x) = \ln(x^2+x+1), D_f : \mathbb{R}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 = -3$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

   (b)

$$g(x) = e^{2x^3+7}, D_f : \mathbb{R}$$

$$g'(x) = (6x^2)(e^{2x^3+7})$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= (12x)e^{2x^3+7} + (6x^2)(e^{2x^3+7})(6x^2) \\ &= e^{2x^3+7}(12x+36x^4) \\ &= 12e^{2x^3+7}(x+3x^4) \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x), D_f : \mathbb{R}^+ \\ &= \ln(\sqrt{x}) - ln(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0$$

$$h''(x) = 0$$

(d)

$$i(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right), D_f : \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{\frac{-4x}{(x^2+1)^2}}{\frac{2}{x^2+1}} \\ &= \frac{-2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i''(x) &= \frac{(-2)(1+x^2-2x^2)}{(x^2+1^2} \\ &= \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(e)

$$j(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), D_f : \mathbb{R}$$

$$j'(x) = \left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right)\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)$$

$$\begin{aligned} j''(x) &= \left(\frac{-2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}\right)\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right) + \left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right)\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right)\left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right) \\ &= \left[\left(\frac{-2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}\right) + \left(\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right)^2\right]\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right) \\ &= \left[\left(\frac{-2(3x^2+1)(1-x^2)+4x}{(1-x^2)^4}\right)\right]\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right) \\ &= \left[\left(\frac{-2+6x^4}{(1-x^2)^4}\right)\right]\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right) \\ &= \left[\left(\frac{2(-1+3x^4)}{(1-x^2)^4}\right)\right]\left(e^{-\frac{1}{1-x^2}}\right) \end{aligned}$$

(f)

$$k(x) = xe^{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{x^2-1} + 2x^2e^{x^2-1} \\ &= e^{x^2-1}(1+2x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k''(x) &= 2xe^{x^2-1}(1+2x^2) + 4xe^{x^2-1} \\ &= 2xe^{x^2-1}(1+2x^2+2) \\ &= 2xe^{x^2-1}(3+2x^2) \end{aligned}$$

Exemple de rédaction : (e).

$$j : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

j est définis et dérivable sur $\mathbb{R}$ / $\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in E, \text{ on a : } j'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

De plus, j est paire car $\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{1-(-x)^2}\right)$. On peut donc uniquement se concentrer sur une partie de la fonction.
[Réaliser le tableau de variation de la fonction, Ainsi que les limites potentielles.]

[Tracer la courbe de variations (en s'aidant des limites et valeurs connues)]

2. *Enoncé : Déterminer les limites suivantes :*

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$;

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$;

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

Exemple de correction de (c) :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} \\ &= \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

3. (a) *Enoncé : Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.*
Soit $x \in]-1,+\infty[$,
Posons :

$$f : x \mapsto e^x - (1+x)$$

f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in]-1,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = e^x - 1$$

Après traçage du tableau de variation, on a : $f \geq 0$.
Donc $\forall x \in]-1,+\infty[$:

$$e^x \geq 1 + x$$

En passant au ln (avec $1 + x > 0$), on a :

$$\ln(1+x) \leq x$$

(b) *Enoncé : En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^* \, 0, 1$
En $x = \frac{1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\leq \frac{1}{n} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq 1 \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\leq e \text{ Par croissance de exp} \end{aligned}$$

En $x = \frac{-1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &\leq -\frac{1}{n} \\ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &\geq 1 \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &\geq e \text{ Par croissance de exp} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

4. *Enoncé : Montrer que pour tous $a, b > 0$,*

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Prenons $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0 \\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq \ln(\sqrt{ab}) \text{ Par croissance du ln} \\ &\geq \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) \end{aligned}$$

5. *Enoncé : Soient $0 < a < b$. Démontrer que :*

$$\forall x > 0, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b.$$

Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ae^{-bx} - be^{-ax} \end{aligned}$$

f est dérivable. Et $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -abe^{-bx} + abe^{-ax} \\ &= ab(e^{-ax} - e^{-bx}) \geq 0 \text{ car } (b > a) \end{aligned}$$

et si $x \neq 0$, l'inégalité devient stricte. Donc f est strictement croissante. Finalement :

$$\forall x > 0, f(x) > f(0) = a - b$$

▶ Sommes et Produits

6. *Enoncé : Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:*

   (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (c) $\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k$ (d) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

   (a) Travail préliminaire :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + 1\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

   (b) Travail préliminaire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k+2}{k(k+1)} - \frac{k}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2))}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{2}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1))} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

   (c) Travail préliminaire : Soit $x \neq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^{k+2} &= x^2\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \\ &= x^2\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) \\ &= \frac{x^{n+3}-x^2}{x-1}\end{aligned}$$

En dérivant :

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)x^{k+1} = \frac{x^{n+3}-x^2-(n+3)x^{n+2}+2x}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+2)2^{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2^{n+3}-(n+3)2^{n+3}\right)\end{aligned}$$

(d) Travail préliminaire :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1)-\ln(k)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k)\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\ln(k)+\ln(1)\right)\\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

7. *Enoncé : Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\quad \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k},\quad \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}.$$

Utiliser principalement le binôme de Newton pour la première et la deuxième.
Pour le reste (3,4) : On s'aideras de cette égalité, a trouver par raisonnement logique :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k} + \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

8. *Enoncé : Soit $n \geq 1$. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

1) Soit $n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (1+x)^n\end{aligned}$$

$$\underbrace{f(x)}_{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \times 1^{n-k}$$

D'où

$$\underbrace{f'(x)}_{n(1+x)^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

En $x = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1) = n2^{n-1}$$

2) En x = -1, on a :

$$(-1) \times \sum_{k=0}^{n} k(-1)^{k-1}\binom{n}{k} = (-1) \times f'(-1) = (-1) \times n(1-1)^{n-1} = 0$$

3) Première méthode : Primitive. Soit $c \in \mathbb{R}$

$$\int^{x} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$$

On choisit $c = 0$

$$\underbrace{\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}}_{f(x)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

En $x = 0$, on a : $F(0) = 0 + c$. Et donc : $\frac{1}{n+1}$ = c
Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$$

En $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = F(1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Deuxieme méthode :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^k t^k\,dt$$

$$\left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$$

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{x+1}$$

En $x = 1$

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{x+1}$$

9. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

10. En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k$, démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j)$ (b) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$ (c) $\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$(d) $\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$

(a) :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i+j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{j} j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + j\times j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\frac{3}{2} + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

(b) :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{=D} + \underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n} i+j}_{=S}$$

Or :

$$\sum_{0\leq i<j\leq n} i+j \text{ est symétrique.}$$

On a :

$$\begin{aligned}
D+2S = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij &= \sum_{i=1}^{n} i\times i + \sum_{1\leq i<j\leq n} ij + \sum_{1\leq j<i\leq n} ij \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
S &= \frac{D+2S-D}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij &= D+S\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= ...\end{aligned}$$

(c) :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)=\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{1\leq i<j\leq n} j+\sum_{1\leq j<i\leq n}$$

Or :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} j \text{ est symétrique.}$$

Donc :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)=\sum_{i=1}^{n} i+2\times\sum_{1\leq i<j\leq n} j$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n} j &= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} j}_{=j(j-1)}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(j^2-j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2-\sum_{j=1}^{n} j\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j) &= \frac{n(n+1)}{2}+2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

(d) :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\\ &= \sum_{i=1}^{n} i\times\sum_{j=1}^{n} j\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

12. Calculer, pour $n, p \in \mathbb{N}$, la somme :

$$\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j).$$

$$\begin{aligned}
S_{n,p} &= \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+p)!}{i!} \\
&= p! \sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{p} \\
&= p! \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{i+p+1}{p+1} - \binom{i+p}{p+1} \right] \\
&= p! \left[\binom{n+p+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \right] \\
&= p! \binom{n+p+1}{p+1} \\
&= \frac{(n+p+1)!}{(p+1)\, n!}.
\end{aligned}$$

13. *Enoncé : En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Soit $x, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto (1+x)^2 n
\end{aligned}$$

On a :

$$f(x) = \underbrace{(1+x)^{2n}}_{A} = \underbrace{(1+x)^n \times (1+x)^n}_{B}$$

Prenons A :

$$\begin{aligned}
A &= (1+x)^{2n} \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j}_{=\binom{2n}{0}x^0 + \binom{2n}{1}x^1 + \binom{2n}{2}x^2 + \ldots + \binom{2n}{n}x^n}
\end{aligned}$$

On remarque que devant x^n, il y auras le terme

$$\binom{2n}{n}$$

Prenons B :

$$\begin{aligned}
B &= (1+x)^n \times (1+x)^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{i} x^{j+i} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k = i+j \leq 2n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k-i}\binom{n}{i}\right) x^k
\end{aligned}$$

On remarque que devant le x^n, il y a auras le terme

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i}\binom{n}{i}$$

En identifiant les coefficients devant x^n, On a :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{n-i}}_{=\binom{n}{i}} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2
\end{aligned}$$