Rappels et compléments calculatoires

▶ Fonctions d'une variable réelle

1. Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, ...) et tracer l'allure de la courbe.

   (a) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$; (c) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x)$; (e) $j : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$

   (b) $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$; (d) $i : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$; (f) $k : x \mapsto \exp(\log(3x)^2)$.

2. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} .$$

4. Montrer que pour tous $a, b > 0$
$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2} .$$

5. Soient $0 < a < b$. Démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b .$$

▶ Sommes et produits

6. Calculer les sommes suivantes, pour ≥ 1 :

   (a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; (c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+2)2^k$; (d) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

7. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$, en n'hésitant pas à les combiner :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} .$$

8. Soit $n \geq 1$; en faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} , \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} .$$

9. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$; calculer
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} .$$

10. En considérant la fonction
$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k ,$$
démontrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

 (a) $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i+j$; (b) $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$; (c) $\displaystyle\sum_{1\leq i,\, j\leq n} \max(i,j)$ (d) $\displaystyle\sum_{1\leq i,\, j\leq n} ij$.

12. Calculer, pour $n, p \in \mathbb{N}$, la somme :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right).$$

13. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

► Approfondissements

14. Soit $\lambda > 0$; pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{\lambda x}$.
    (a) Étudier les variations (limites comprises) de la fonction f.
    (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$; montrer qu'alors on a
    $$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \tag{1}$$
    (c) Réciproquement, montrer que toutes les solutions x de (1) satisfont la relation $f(x) = x$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant par exemple que $f(x) > x$.*
    (d) Résoudre l'équation (1). *Indication : étudier une fonction pertinente.*
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose :
    $$f_n(x) = x^n(1-x).$$
    (a) Déterminer, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
    (b) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, f_n admet un maximum sur $[0,1]$, noté u_n. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.
16. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, établir que l'on a :
    $$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$
17. Démontrer que :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$