

ENSEMBLES, MÉTHODES DE DÉMONSTRATION

► Raisonnements élémentaires

1. *Énoncé* : Soit A une partie de \mathbb{R} . Expliquer la signification et nier les phrases quantifiées suivantes :

(a) Assertion : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$
 Explication : M majore tout l'ensemble A
 Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M$

(b) Assertion : $\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}, x \leq M$:
 Explication : Pour tout élément de l'ensemble, il existe un réel qui lui est supérieur ou égal
 Négation : $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R}, x > M$

(c) Assertion : $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R}, x \leq M$;
 Explication : Il existe un élément de A qui est plus petit que tout les réels
 Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M$

(d) Assertion : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x \leq M$.
 Explication : A désigne un ensemble qui peut s'étendre vers $-\infty$.
 Négation : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x > M$;

2. *Énoncé* : Exprimer par une phrase quantifiée l'assertion « le cube de tout nombre réel positif supérieur ou égal à 3 est supérieur ou égal à 27 ». Donner sa négation.

Assertion : $\forall x \in [3, +\infty[, x^3 \geq 27$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \Rightarrow (x^3 \geq 27)$

Négation : $\exists x \in [3, +\infty[, x^3 < 27$ ou $\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 3) \wedge (x^3 < 27)$

3. *Énoncé* : Démontrer que l'assertion « tout entier divisible par 2 et 4 est divisible par 8 » est fausse.

$$12 = 3 \times 4 = 6 \times 2$$

12 est donc divisible par 4 et par 2, mais il n'est pas divisible par 8.

On a donc un contre exemple à la propriété. Elle est donc fausse.

4. *Énoncé* : Démontrer par l'absurde que si $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1$ sont des éléments de $[0, 1]$, alors il existe i compris entre 0 et $n - 1$ tel que $x_{i+1} - x_i \geq \frac{1}{n}$.

Supposons que $\forall i \in [0, n - 1], x_{i+1} - x_i < \frac{1}{n}$ On a :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &< \frac{1}{n} \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \\ x_n - x_0 &< \frac{n}{n} \\ x_n = 1 &< 1. \end{aligned}$$

Cela est absurde. Donc la proposition est vraie.

5. *Énoncé* : Établir que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ -2xy &\geq -x^2 - y^2 \\ xy &\leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

► Ensembles

6. *Énoncé* : Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à quatre éléments. Compléter chacune des assertions suivantes avec le symbole « \in » ou « \subset » de façon à ce qu'elles soient vraies.

- (a) $d \in E$; (c) $E \subset E$; (e) $E \in \mathcal{P}(E)$; (g) $\{a, d\} \subset E$;
 (b) $\{c\} \subset E$; (d) $\emptyset \subset E$; (f) $\emptyset \in, \subset \mathcal{P}(E)$; (h) $\{a, d\} \in \mathcal{P}(E)$.

7. *Énoncé* : Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer que : $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.

Montrons que $(A = B) \Rightarrow (A \cap B = A \cup B)$

Supposons $A = B$

$$\text{Soit } A \cup A = A = A \cap A$$

$$\text{Donc } A \cap B = A \cup B$$

Montrons que $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$

Supposons $(A \cap B = A \cup B)$

$$\forall x \in A, x \in A \cup B = A \cap B \text{ (car } A \in A \cup B)$$

$$\text{Donc } x \in B$$

$$\text{d'où } A \subset B$$

Les rôles de A et B étant symétrique, on a aussi $B \subset A$ Donc $A = B$

8. *Énoncé* : Déterminer tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A \cap B = \{2, 3, 5\}$.

$$\begin{aligned}A &= \{2, 3, 5, 1, 4\} & B &= \{2, 3, 5\} \\ A &= \{2, 3, 5\} & B &= \{2, 3, 5, 1, 4\} \\ A &= \{2, 3, 5, 1\} & B &= \{2, 3, 5, 4\} \\ A &= \{2, 3, 5, 4\} & B &= \{2, 3, 5, 1\}\end{aligned}$$

9. *Énoncé* : Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que : $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Montrons que $(A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C})$

Supposons $(A \cap B = A \cap C)$

$$\forall x \in A \cap \bar{B}, x \in A \text{ et } x \notin B$$

et si $x \in C$, $x \in A \cap C = A \cup B$ par hypothèse. Ce qui est absurde donc $x \notin C$

$$\text{Donc } x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C$$

On a : $x \in A \cap \bar{B}$ et $x \in A \cap \bar{C}$. Ce qui implique $A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$

Les rôles de B et C étant symétrique, on a aussi $A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$ Donc $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

Montrons que $(A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}) \Rightarrow (A \cap B = A \cap C)$

Supposons $(A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C})$

Les rôles de \bar{B} et \bar{C} sont symétrique avec les rôles de B et C.

Donc par l'argument précédent on a : $A \cap B = A \cap C$

10. *Enoncé : Déterminer*

$$\bigcap_{n \geq 1} \left[2 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{7}{n} \right]$$

Notons E l'intersection à déterminer. Montrons que $E = [2, 5]$

Montrons que $[2, 5] \subset E$

$$x \in E \iff \forall n \geq 1, 2 - \frac{1}{n} \leq x \leq 5 + \frac{7}{n}$$

Soit $x \in [2, 5]$, on a : $2 \leq x \leq 5$

Alors, $\forall n \geq 1$, on a :

$$2 - \frac{1}{n} \leq 2 \leq x \leq 5 \leq 5 + \frac{7}{n}$$

Donc $x \in E$, c'est à dire $[2, 5] \subset E$

Montrons que $E \subset [2, 5]$

$$\text{Soit } x \in E, \forall n \geq 1$$

$$2 - \frac{1}{n} \leq x \leq 5 + \frac{7}{n}$$

Par passage a la limite :

$$2 \leq x \leq 5$$

' donc $x \in [2, 5]$, C'est à dire $E \subset [2, 5]$

11. *Enoncé : Soit E un ensemble. Déterminer $X = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \forall B \in \mathcal{P}(E), A \cup B = B\}$.*

On pose : $X = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \forall B \in \mathcal{P}(E), A \cup B = B\}$

Or $A \cup B = B \iff A \subset B$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$\forall B \in \mathcal{P}(E), A \cup B = B$

Pour $B = \emptyset$ Alors $A = \emptyset$.

L'ensemble vide appartient à X car $\forall B \subset E, \emptyset \cup B = B$

Donc : $X = \{\emptyset\}$

12. *Énoncé : On pose :*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy^2 = x^4 \iff x + y^2 = x^3\}.$$

Peut-on donner une expression plus concise de l'ensemble X ?

13. *Énoncé : Comparer les deux ensembles suivants :*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \quad \text{et} \quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \neq 0) \wedge (x = \frac{1}{y})\}.$$

► Raisonnements par récurrence

14. *Énoncé : Soit $P(n)$ la propriété « l'entier $8n + 1$ est divisible par 7 ». Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ pour tout $n \geq 0$. Que peut-on en déduire ?*

$\forall n \geq 0, P(n) : "7 \mid 8^n + 1"$

Hypothèses : $P(n)$ vraie. i.e $\exists k \geq 0$ tel que $8^n + 1 = 7k$

$$\begin{aligned} 8^{n+1} + 1 &= 8^n \times 8 + 1 \\ &= (7k - 1)8 + 1 \quad (\text{Par hypothèse}) \\ &= 7 \times 8 \times k - 8 + 1 \\ &= 7(8k - 1) \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie. N'étant pas initialisé, elle reste tout de même fausse.

15. *Énoncé : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.*

Montrons par double récurrence sur n que $\forall n \geq 0, P(n) : "U_n \geq n"$

$n = 0 : U_0 = 1 \geq 0$ Ok.

$n = 1 : U_1 = 1 \geq 1$ Ok.

Supposons que $P(n)$ et $P(n + 1)$ est vraie pour un certain $n \geq 0$.

Montrons que $P(n + 2)$ est vraie.

$$\begin{aligned} U_n &\geq n \\ (\text{Par H.R.}) \quad U_{n+2} &\geq n + (n + 1) \\ U_{n+2} &\geq 2n + 1 \end{aligned}$$

De plus, pour $\forall n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\geq n + 2 \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

On a donc $\forall n \geq 1,$

$$\begin{aligned} U_{n+2} &\geq 2n + 1 \geq n + 2 \\ U_{n+2} &\geq n + 2 \end{aligned}$$

$\forall n \geq 1, P(n + 2)$ est donc vraie. La propriété est héréditaire

Conclusion : La propriété est initialisé en 0 et 1, et est héréditaire pour tout entiers naturels supérieur ou égal à 1. Elle est donc vraie pour tout entiers naturels.

16. *Enoncé* : On considère la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n. \end{cases}$$

(a) Déterminer les racines ψ et $\bar{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 4 \times 3 = 13$$

$$\text{Donc : } \psi = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ et } \bar{\psi} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\psi^n - \bar{\psi}^n}{\psi - \bar{\psi}}$.

Montrons par double récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_n = \frac{\psi^n - \bar{\psi}^n}{\psi - \bar{\psi}}"$.

$$n = 0 : u_0 = \frac{\psi^0 - \bar{\psi}^0}{\psi - \bar{\psi}} = 0 \text{ Ok.}$$

$$n = 1 : u_1 = \frac{\psi^1 - \bar{\psi}^1}{\psi - \bar{\psi}} = 1 \text{ Ok.}$$

Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraie à $n \geq 0$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} \psi^{n+2} &= \psi^n \times \psi^2 \\ &= \psi^n(\psi + 3) \\ \psi^{n+2} &= \psi^{n+1} + 3\psi^n \end{aligned} \quad (\text{Idem pour } \bar{\psi})$$

Or,

$$\begin{aligned} U_{n+2} &= U_{n+1} + 3U_n \\ &= \left(\frac{1}{\psi - \bar{\psi}} \right) ((\psi^{n+1} - \bar{\psi}^{n+1}) + 3(\psi^n - \bar{\psi}^n)) \\ &= \frac{\psi^{n+2} - \bar{\psi}^{n+2}}{\psi - \bar{\psi}} \end{aligned}$$

$P(n+2)$ est vraie, La propriété est héréditaire.

Conclusion : $P(0)$, $P(1)$ vraie. $P(n)$ héréditaire. $P(n)$ vraie pour tout entier naturels n .

17. *Enoncé* : Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^{p_n}(2q_n + 1)$.

Montrons par récurrence forte sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) : "n = 2^{p_n}(2q_n + 1)"$

Supposons que $P(n)$ vrai pour un certain $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Supposons $P(n)$ vraie à $n > 0$ fixé. On a deux cas possible :

Cas n°1 : n est paire, et donc $n+1$ est impaire.

Dans ce cas :

$$n + 1 = 2k + 1$$

$$\text{et si } p = 0 : 2^0(2q_n + 1) = 2q + 1$$

Ainsi, il suffirait donc de définir $p_n = 0$ et $q_n = k = \frac{n}{2}$ pour valider le cas où $n+1$ est impaire.

Cas n°2 : n est impaire, et donc $n+1$ est paire.

Dans ce cas :

$$n + 1 = 2k$$

$$n + 1 = 2[2^p(2q_k + 1)] \quad \text{Par H.R}$$

$$n + 1 = 2^{p_k+1}(2q_k + 1)$$

il suffirait donc de définir $p_n = p_k + 1$ et $q_n = q_k$ pour valider le cas où $n+1$ est paire.

18. *Enoncé* : Déterminer les applications f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(n) + f(m)$.

Analyse : On suppose trouvé : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, f(m + n) = f(n) + f(m)$$

$$f(0) = f(0 + 0)$$

$$= f(0) + f(0) = 2f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = f(1 + 1) = 2f(1)$$

$$f(3) = f(2 + 1) = 3f(1)$$

Par récurrence, $f(n) = nf(1), \forall n \geq 1$

Si on pose $a = f(1)$

On a :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (\text{Condition})$$

$$x \mapsto an$$

Synthèse :

On vérifie que la condition trouvée est suffisante.

i.e Montrons que (Condition) \Rightarrow (Enoncé)

Soit $a \in \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto an$$

Donc $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(n + m) &= a(n + m) \\ &= an + am \\ &= f(n) + f(m) \end{aligned}$$

Conclusion : Les fonctions recherchés sont les $f : n \mapsto an$ avec a fixé dans \mathbb{N}