Ensembles, méthodes de démonstration

▶ Raisonnements élémentaires

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Expliquer la signification et nier les phrases quantifiées suivantes :
   (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$;
   (b) $\forall x \in A, \exists M \in \mathbb{R}, x \leq M$;
   (c) $\exists x \in A, \forall M \in \mathbb{R}, x \leq M$;
   (d) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x \leq M$.
2. Exprimer par une phrase quantifiée l'assertion "le cube de tout nombre réel positif supérieur ou égal à 3 est supérieur ou égal à 27". Donner sa négation.
3. Démontrer que l'assertion "tout entier divisible par 2 et 4 est divisible par 8" est fausse.
4. Démontrer par l'absurde que si $0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ sont des éléments de $[0,1]$ alors il existe i compris entre 0 et $n-1$ tel que $x_{i+1} - x_i \geq \dfrac{1}{n}$.
5. Établir que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) .$$

▶ Ensembles

6. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à quatre éléments. Compléter chacune des assertions suivantes avec le symbole "$\in$" ou " $\subset$ " de façon à ce qu'elles soient vraies.

   (a) $d \ldots E$; (c) $E \ldots E$; (e) $E \ldots \mathscr{P}(E)$; (g) $\{a, d\} \ldots E$;
   (b) $\{c\} \ldots E$; (d) $\emptyset \ldots E$; (f) $\emptyset \ldots \mathscr{P}(E)$; (h) $\{a, d\} \ldots \mathscr{P}(E)$.
7. Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que :
$$A = B \iff A \cap B = A \cup B \,.$$
8. Déterminer tous les ensembles A et B tels que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A \cap B = \{2, 3, 5\}$.
9. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \,.$$
10. Déterminer
$$\bigcap_{n \geq 1} \left[2 - \frac{1}{n}\,, 5 + \frac{7}{n}\right] .$$
11. Soit E un ensemble. Déterminer
$$X = \{A \in \mathscr{P}(E) \,|\, \forall B \in \mathscr{P}(E), A \cup B = B\} \,.$$
12. On pose :
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + xy^2 = x^4 \Leftrightarrow x + y^2 = x^3\} \,.$$
    Peut–on donner une expression plus concise de l'ensemble X ?
13. Comparer les deux ensembles suivants :
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y \neq 0) \wedge \left(x = \frac{1}{y}\right)\right\} .$$

▶ Raisonnements par récurrence

14. Soit $P(n)$ la propriété "l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7". Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 0$. Que peut–on en déduire ?
15. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.
16. On considère la suite définie par récurrence comme suit :
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 3u_n \end{cases}.$$
   (a) Déterminer les racines ψ et $\overline{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.
   (b) Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\psi^n - \overline{\psi}^n}{\psi - \overline{\psi}}.$$
17. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ n = 2^p(2q+1).$$
18. Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$

▶ Approfondissements

19. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$
20. Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles deux à deux distincts. Montrer que :
$$\exists j \in [\![1,n]\!], \quad \forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}, \quad E_k \not\subset E_j.$$
21. *Suite de Fibonacci.* On considère la suite (F_n) définie par $\mathrm{F}_0 = 0, F_1 = 1$ et par la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$
   (a) Calculer F_2, F_3, F_4 et F_5.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 5, F_n \geq n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (F_n) ?
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n} \qquad \text{et} \qquad 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} = F_{2n-1}.$$
   (d) Résoudre l'équation $x^2 = x+1$; on notera α la solution positive et β la solution négative. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right).$$
   (e) Soit $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \geq r$. Établir que
$$F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r.$$
22. *Inégalités de Bernoulli.* Soit $a \in]0,1[$ et $n \geq 2$; établir que :
$$1 - na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$
23. Soit $n \in \mathbb{Z}$; démontrer que n est pair si et seulement si n^2 l'est.