

L'objectif de ce document est de proposer quelques exercices préparatoires à votre rentrée en MPSI (les PCSI ont reçu un document quasi-identique). Ils peuvent être traités dans l'ordre souhaité, et au rythme qui vous conviendra. La dernière section (Approfondissements) est cependant pensée pour être traitée en dernier, et contient des exercices d'un niveau sensiblement plus élevé que les précédentes.

## ► Révisions de calcul élémentaire

### Fractions

**Rappels :** On suppose que chaque dénominateur est non nul. On peut écrire :

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \quad \text{Exemple : } \frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \text{Exemple : } \frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} + \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{9+16}{24} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{Exemple : } \frac{-3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{-3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{-3}{35}$$

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b} \quad \text{Exemple : } 6 \times \frac{3}{8} = \frac{6 \times 3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{Exemple : } \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{9}} = \frac{1}{4} \times \frac{9}{7} = \frac{9}{28}$$

Règle de simplification : si  $k$  est le pgcd de  $a$  et  $b$  (on peut écrire  $a = k \times a'$  et  $b = k \times b'$ , avec  $k, k'$  des entiers relatifs), alors

$$\frac{a}{b} = \frac{ka'}{kb'} = \frac{a'}{b'}$$

Il faut toujours chercher à simplifier les fractions dès que possible. Par exemple pour calculer  $\frac{9}{4} \times \frac{10}{3}$ , on évitera d'écrire  $= \frac{90}{12}$  puis simplifier, on préférera écrire :

$$\frac{9}{4} \times \frac{10}{3} = \frac{3 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{2}} \times \frac{5 \times \cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$$

### Puissances entières

**Rappels :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  non nuls,  $m$  et  $n$  entiers, on peut écrire :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \text{Exemple : } 2^3 \times 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{Exemple : } \frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{Exemple : } (3 \times 7)^2 = 3^2 \times 7^2$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \quad \text{Exemple : } (10^3)^5 = 10^{3 \times 5} = 10^{15}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{Exemple : } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

1. Simplifier les nombres suivants :

$$A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$$

$$B = \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5}$$

$$C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4$$

$$D = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$$

$$E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$$

$$F = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$$

$$G = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4}$$

$$H = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$I = (a^3)^2 \times a^{-4}$$

$$J = a^2 b^{-3} (ab)^4$$

2.  $A = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ,  $B = 2^{21} + 2^{22}$ ,  $C = \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

## Racines carrées

**Rappels :** pour tous réels  $a$  et  $b$  positifs, on peut écrire :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad \text{Exemple : } (\sqrt{3})^2 = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{si } a > 0, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad \text{Exemple : } 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{Exemple : } \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{Exemple : } \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

**Attention !**  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  Exemple :  $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$   
 $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

3. Simplifier l'écriture des nombres suivants (on essaiera de les mettre sous forme  $a\sqrt{b}$  avec  $b$  le plus petit possible).

$$- A = \sqrt{12}$$

$$- D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$- G = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$- B = \sqrt{48}$$

$$- E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$$

$$- H = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$- C = \sqrt{36 + 64}$$

$$- F = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}}$$

$$- I = 3(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

4. Même consigne pour les nombres ci-dessous

$$- A = \sqrt{7^3}$$

$$- B = \sqrt{17^5}$$

$$- C = \sqrt{5^4}$$

$$- D = \sqrt{17^4}$$

$$- E = \sqrt{17^4}$$

## Calcul littéral et identités remarquables.

**Rappels :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\frac{\text{(forme factorisée)}}{\text{(forme développée)}}$$

$$\frac{(a-b) \times (a+b)}{\quad} = a^2 - b^2$$

$$\frac{(a+b)^2}{\quad} = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$$

$$\frac{(a-b)^2}{\quad} = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$$

5. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

(a)  $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

- (b)  $(x-1)^3(x^2+x+1)$   
 (c)  $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$   
 (d)  $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

6. Même consigne :

- (a)  $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$   
 (b)  $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$   
 (c)  $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1) + 1\right)x - x^6 - x^5 + 2$

7. Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

- (a)  $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$   
 (b)  $25 - (10x+3)^2$   
 (c)  $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$

## ► Solutions des exercices de calcul élémentaire

- $A = 3^6$ ,  $B = 2^{-3} = 1/2^3$ ,  $C = 2^4 * 3^{20}$ ,  $D = 2^2 * 5 * 7 = 140$ ,  $E = 9^{14}$ ,  $F = 1/2^7$ ,  $G = 3^9$ ,  
 $H = 2/3$ ,  $I = a^2$ ,  $J = a^6b$ .
- $A = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$ ,  $B = 2^{21} \cdot 3$ ,  $C = 2$
- $A = 2\sqrt{3}$ ,  $B = 4\sqrt{3}$ ,  $C = 10$ ,  $D = 6\sqrt{2}$ ,  $E = 11\sqrt{3}$ ,  $F = 63/55$ ,  $G = 3\sqrt{7}/7$ ,  $H = 5 - 4\sqrt{3}$ ,  
 $I = -3$ .
- $A = 7\sqrt{7}$ ,  $B = 289\sqrt{17}$ ,  $C = 25$ ,  $D = 289$ ,  $E = 289$ .
- (a)  $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$   
 (b)  $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$   
 (c)  $x^5 - x^3 + x^2 - 1$   
 (d)  $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
- (a)  $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$   
 (b)  $-28 + 21x$   
 (c)  $2 + x^3 - x^4 - x^5$
- (a)  $-6(6x+7)$   
 (b)  $4(5x+4)(-5x+1)$   
 (c)  $2(3x-4)(10x+3)$

## ► Exercices

Ces exercices ne sont pas corrigés, mais vous avez le possibilité de contacter votre enseignant et vos camarades via le serveur de classe :

<https://chat.webgirand.eu>

pour échanger et quérir quelque aide.

## Fonctions d'une variable réelle

1. Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, périodicité, convexité, ...) et tracer l'allure de la courbe.

- (a)  $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ ; (c)  $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \ln(x)$ ; (e)  $j : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$   
 (b)  $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$ ; (d)  $i : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$ ; (f)  $k : x \mapsto xe^{x^2-1}$ .

2. Établir, pour tout  $x \geq 0$ , l'encadrement

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

3. Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

4. Soit  $\lambda > 0$ ; pour  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $f(x) = e^{\lambda x}$ .

(a) Étudier les variations (limites comprises) de la fonction  $f$ .

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = x$ ; montrer qu'alors on a

$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \tag{1}$$

(c) Réciproquement, montrer que toutes les solutions  $x$  de (1) satisfont la relation  $f(x) = x$ .  
*Indication : on pourra raisonner par l'absurde, en supposant par exemple que  $f(x) > x$ .*

(d) Résoudre l'équation (1). *Indication : étudier une fonction pertinente.*

5. Montrer que pour tous  $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \left( \frac{a+b}{2} \right).$$

6. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction continue. Démontrer qu'il existe un  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = x$ .

7. Soit  $f$  une fonction continue strictement décroissante de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = x^n$  admet une unique solution sur  $[0, 1]$ , que l'on notera  $x_n$ .

(b) Faire un dessin pour visualiser les premiers termes de la suite  $(x_n)_n$ .

(c) Démontrer que la suite  $(x_n)_n$  converge et déterminer sa limite.

## Trigonométrie

8. Résoudre les équations suivantes sur  $] - 2\pi, 2\pi[$  :

$$(a) \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 3x - \frac{\pi}{2} \right) \quad (b) \quad 2 \cos \left( \pi - \frac{x}{2} \right) = -1$$

9. On cherche à résoudre sur  $[0, 2\pi[$  l'inéquation :

$$(I) : 2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1 \geq 0$$

(a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ . Vérifier que  $f(1) = 0$ .

(b) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  vérifiant  $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ .

(c) Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

(d) En déduire les solutions de (I).

## Équations différentielles et primitives

10. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = x \left( 1 - e^{x^2-1} \right).$$

(a) Déterminer le signe de  $h(x)$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .

(b) Calculer  $\int_0^1 h(x) dx$ .

11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

*Indication* : on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.

- (a)  $y' + 2y = t^2 + t + 1$  sur  $\mathbb{R}$ ;      (c)  $y' + 2y = (x + 1) \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b)  $y' + 3y = (x^2 + 1)e^{-3x}$  sur  $\mathbb{R}$ ;

12. Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx, \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \sqrt{e^x} \, dx.$$

13. Déterminer une primitive de la fonction  $f : x \mapsto (\sin(2x))^3 \cos(3x)$ .

## Suites numériques

14. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :

- (a)  $u_n = (-1)^n e^{-n}$ ;    (b)  $v_n = \frac{n^2 + 7n + 12}{n^3 + n^4}$ ;    (c)  $w_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$ ;    (d)  $x_n = \cos(n\pi)$ .

15. Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , avec  $a \notin \{0, 1\}$ . On considère une suite  $(u_n)_n$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

(a) Déterminer un réel  $r$  tel que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = a^n (u_0 - r) + r.$$

(b) Que dire de la suite définie, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n - r$  ?

16. On pose  $u_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2}.$$

Démontrer que la suite  $(u_n)_n$  est convergente et déterminer sa limite. *Indication* : on pourra commencer par démontrer que  $(u_n)_n$  est décroissante.

17. On considère la suite  $(F_n)$  définie par  $F_0 = 0, F_1 = 1$  et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

(a) Calculer  $F_2, F_3$  et  $F_4$ .

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n$ .

## ► Approfondissements

*Les exercices qui suivent sont d'une difficulté certaine. Il ne faut pas vous inquiéter si vous n'avez pas d'idée. Normalement, dans quelques mois, vous aurez les bons réflexes pour attaquer ce type de questions !*

1. Démontrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

2. On fixe  $u_0 = 1$  et  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sin(u_n)$ . Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx.$$

(a) Calculer  $I_0$ .

(b) Démontrer que la suite  $(I_n)_n$  est convergente.

(c) Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim I_n$ .

(d) Démontrer que :

$$\forall n \geq 0, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx$$

(e) Étudier la convergence de la suite  $(nI_n)_n$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

(a) Déterminer, à  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

(b) i. Prouver que, si  $n \in \mathbb{N}$  est fixé,  $f_n$  admet un maximum sur  $[0, 1]$ , noté  $u_n$ .  
ii. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_n$ .

5. Dans toute la suite et pour  $n \geq 0$ , on appelle  $n$ -ième **intégrale de Wallis** la quantité

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx.$$

(a) Calculer  $W_0$  et  $W_1$ .

(b) Démontrer que la suite  $(W_n)_n$  converge vers un élément de  $\mathbb{R}_+$ .

(c) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \geq 0, \quad W_{n+2} = \left( \frac{n+1}{n+2} \right) W_n.$$

En déduire que, pour tout  $p \geq 0$  :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

(d) Montrer que, pour tout  $n \geq 0$  :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

(e) Établir que pour tout  $n \geq 0$  on a :

$$1 - \frac{1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

(f) Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nW_n^2 = \pi$ . En déduire la limite de la suite  $(W_n)_n$ .