Semaine 21

du 17 au 21 mars 2025

▶ Espaces vectoriels (2)

➠ ***Reprise du programme précédent.***

- s.e.v engendré par une partie (notation $\mathrm{Vect}(A)$) ;
- familles libres (et liées), familles génératrices, bases ;
- une famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si pour toute famille **presque nulle** $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires on a
$$\left(\sum_{i\in I}\lambda_i f_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)\ ;$$
- toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre ;
- caractérisation des bases comme familles libres maximales et familles génératrices minimales ;
- l'image par une application linéaire injective (resp. surjective) d'une famille libre (resp. génératrice) est libre (resp. génératrice) ;
- caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire par l'image d'une base ;
- **une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base de son espace de départ** ;
- somme de **deux** s.e.v, notion de somme directe (notation $\oplus$) ;
- caractérisation de la somme directe de **deux** sous–espaces à l'aide de leur intersection ;
- sous–espaces supplémentaires ;
- projecteurs sur un s.e.v parallèlement à un autre, caractérisation à l'aide de l'image et du noyau ;
- symétries par rapport à un s.e.v parallèlement à un autre, caractérisation à l'aide de deux s.e.v supplémentaires.
- hyperplans (définis comme noyau d'une forme linéaire non nulle), caractérisation par leur supplémentaire.

✖***Aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur les sujets suivants : dimension, symétries et projecteurs orthogonaux, dualité.***

▶ Questions de cours (*démonstrations*)

- tout énoncé ou définition est exigible ;
- la composée de deux applications linéaires est linéaire ;
- l'inverse d'une bijection linéaire est linéaire ;
- l'intersection de d'une famille de s.e.v d'un même e.v en est un s.e.v ;
- deux s.e.v sont en somme directe si et seulement si leur intersection est nulle ;
- si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs et f une application linéaire, alors $f(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})) = \mathrm{Vect}(f(\mathscr{F}))$;
- l'image par une application linéaire injective (resp. surjective) d'une famille libre (resp. génératrice) est libre (resp. génératrice) ;
- CCINP 55, 62, 85 ou 90 (modifiés, *cf.* TD 18).