Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

– I –

1. Un graphe à deux sommets sans arête comme $\Gamma = (\{1,2\}, \emptyset)$ convient.
2. (a) Toute paire de sommets d'un graphe complets est reliée par une arête, donc par une chaîne de longueur 1.
   (b) La réciproque est fausse : le graphe $\Gamma = (\{1,2,3\}, \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ est connexe mais pas complet car $\{1,3\}$ n'en est pas une arête.
3. On trouve :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
.
4. (a) Notons $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice M^2 ; alors pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ on a :
$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,j}$$
sachant que le produit $m_{i,k}m_{k,j}$ est non nul si et seulement si $s_i \rightsquigarrow s_k$ et $s_k \rightsquigarrow s_j$, et donc la somme compte le nombre de chaînes de longueur 2 entre les sommets s_i et s_j. On conclut par récurrence, que je rédigerais bien mais personne ne la lirait. Si cela vous manque très fort, parlons–en.
   (b) Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a $m_{i,j} = 1$ si et seulement si $\{s_i, s_j\} \in \mathscr{A}$. Comme $\{s_i, s_j\} = \{s_j, s_i\}$, le coefficient $m_{j,i}$ est déterminé par la même condition et donc est égal à $m_{i,j}$. *In fine*, $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Soit $i \in [\![1,n]\!]$; alors q_i est une somme de 0 ou 1, le nombre 1 apparaissant si et seulement si $m_{i,j} = 1$, *i.e* si et seulement si $s_i \rightsquigarrow s_j$. q_i est donc égal aux nombres de sommets reliés par une arête à s_j (on parlera de sommets *adjacents* à s_i).
5. (a) Tous ses coefficients sont égaux à 1, sauf sa diagonale qui est nulle.
   (b) Un tel graphe est composés d'autant de "sous–graphes" que de blocs dans sa matrice d'adjacence. Ces "sous–graphes" ne sont reliés entre eux par aucune arête.

– II –

1. Les $p(x,y)$ sont des nombres positifs et pour tout $x \in \mathscr{S}$, $\displaystyle\sum_{y \in \mathscr{S}} p(x,y) = 1$, donc p est à valeurs dans $[0,1]$.
2. (a) Il s'agit de l'unique probabilité associée à la distribution $(p(x,y)_{y \in \mathscr{S}}$.
   (b) Soit $A \subset S$; alors, par positivité :
$$p_x(A) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{y \in A} p(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \forall y \in A,\ p(x,y) = 0$$
Cette condition est équivalente au fait que A est composé de sommets y tels que $(x,y) \notin \mathscr{E}$, *i.e* non directement atteignables depuis x.

3. On trouve :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. On suppose que $\mathscr{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ et on note T la matrice de transition du graphe $\mathscr{G}$.
   (a) Non, se référer à la question précédente.
   (b) On vérifie rapidement que $L_i = 1$; C_j est quant à elle égale à la somme des probabilités de transitions vers le sommet s_j.

– III –

1. Pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $n \geq 1$, on pose A_i^n : "obtenir l'issue A_i lors de la n–ième répétition de l'expérience". À n fixé, $(A_1^n, \dots, A_k^n)$ forment un système complet d'événements et donc

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i^n) = \sum_{i=1}^{k} a_{i,n}\,.$$

2. Posons $M = (m_{i,j})_{i,j}$ et fixons $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$. Alors le coefficient $b_{i,j}$ ligne i, colonne j de la matrice $P_n M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ est donné par :

$$b_{i,j} = \sum_{i=1}^{k} a_{i,n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i^n) \mathbb{P}_{A_i^n}(A_j^{n+1})$$

et donc, par formule des probabilités totales appliquée au SCE $(A_1^n, \dots, A_k^n)$:

$$b_{i,j} = \mathbb{P}(A_j^{n+1})\,.$$

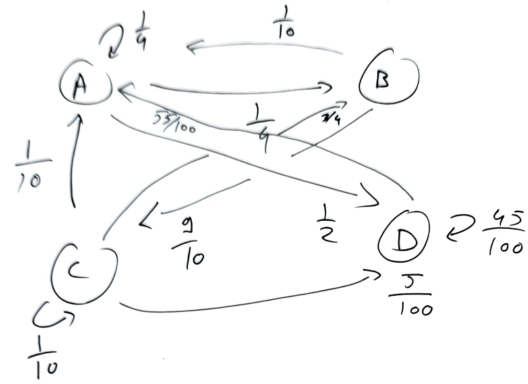
Ceci entraîne que $P_{n+1} = P_n M$ et donc, par récurrence triviale (penser à vérifier le cas $n = 0$) que $P_{n+1} = P_0 M^n$.

3. (a) — Si P_N est un état stable, alors $P_{N+1} = P_N$ et donc d'après la question précédente $P_N = P_N M$.
   — Réciproquement, si $P_N = P_N M$ alors pour tout $n > N$ on a :

$$P_n = P_0 M^n = P_0 M^N M^{n-N} = P_N M^{n-N} = (P_N M) M^{n-N-1} = P_N M^{n-N-1}$$

   et donc, par récurrence, $P_n = P_N$. L'état est donc stable.

   (b) Voici un dessin moche.



D'après ce qui précède, on sait qu'un état $P = (x\ y\ z\ t)$ est stable si et seulement si il est solution du système linéaire $M^T P^T = P^T$. On résout et on en trouve un.