Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte ?? pages.

L'objet de ce devoir est l'étude de certaines propriétés de graphes déterministes et probabilistes.

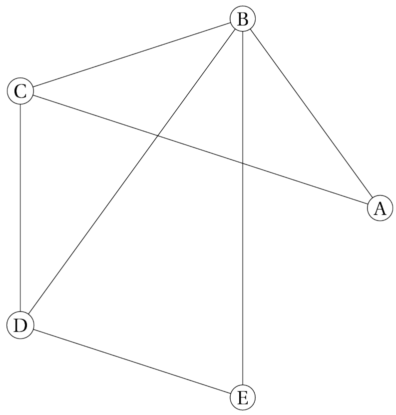
Définition 1.

On appelle ***graphe*** *la donnée d'un couple* $\Gamma = (S, A)$*, où :*

— $\mathscr{S}$ *est un ensemble fini, appelé ensemble des* ***sommets*** *du graphe ;*

— $\mathscr{A}$ *est un ensemble de parties à un ou deux éléments de* $\mathscr{S}$*, appelé ensemble des arêtes du graphe.*

Il peut être utile pour se fixer les idées de représenter un graphe sous forme graphique (...) en reliant entre eux les couples de sommets appartenant à $\mathscr{A}$. Par exemple, le dessin suivant



représente le graphe de sommets $\mathscr{S} = \{A, B, C, D, E\}$ et d'arêtes

$$\mathscr{A} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{D, E\}\}.$$

Une telle représentation graphique permet de se donner des bases concrètes pour bâtir un raisonnement, ou de poser un exemple. Elle ne peut EN AUCUN CAS constituer une démonstration.

Définition 2.

Soit $\Gamma = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ *un graphe et soient* $x, y \in S$*. On dit qu'il existe une* ***chaîne*** *entre* x *et* y *dans* Γ *si il existe une suite finie* $a_0, \dots, a_k$ *de* $\mathscr{S}$ *tels que* $x = a_0$*,* $y = a_k$ *et* $\{a_0, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{,k-1}\, a_k\} \in \mathscr{A}$*. On note alors* $x \rightsquigarrow y$ *et l'entier* k *est appelé* ***longueur*** *de la chaîne.*
On dit qu'une chaîne entre x *et lui même est un* ***cycle*** *si toutes les arêtes le constituant sont distinctes.*

Définition 3.

Un graphe $\Gamma = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ *est dit :*

— ***connexe*** *si* $\forall x, y \in \mathscr{S}$ *tels que* $x \neq y$*,* $x \rightsquigarrow y$ *;*

— ***complet*** *si* $\forall x, y \in \mathscr{S}$ *tels que* $x \neq y$*,* $\{x, y\} \in \mathscr{A}$*.*

Définition 4.

Soit $\Gamma = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ un graphe. On suppose que $\mathscr{S}$ est donné sous la forme d'une suite ordonnée finie, i.e $\mathscr{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. On appelle ***matrice d'adjacence*** *de Γ la matrice $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit :*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } \{s_i, s_j\} \in \mathscr{A} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

– I –

1. Donner un exemple de graphe non connexe.
2. (a) Démontrer que tout graphe complet est connexe.
   (b) Que dire de la réciproque ?
3. En ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique, donner la matrice d'adjacence de l'exemple de graphe donné page 1.
4. Soit $\Gamma = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ un graphe, avec $\mathscr{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et on note $M = (m_{i,j})_{i,j}$ sa matrice d'adjacence.
   (a) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, le coefficient ligne i colonne j de la matrice M^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant s_i et s_j.
   (b) Démontrer que la matrice M est symétrique.
   (c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Que représente la quantité $q_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$?
5. (a) Que dire de la matrice d'adjacence d'un graphe complet ?
   (b) Que dire d'un graphe dont la matrice d'adjacence est diagonale par blocs (avec au moins deux blocs) ?

Définition 5.

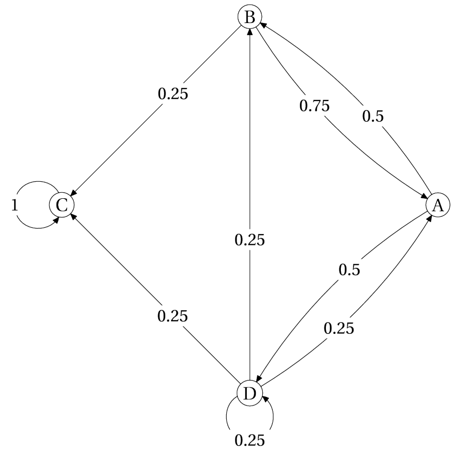
On appelle ***graphe probabiliste*** *la donnée d'un triplet $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{E}, p)$, où*

- *$\mathscr{S}$ est un ensemble fini, appelé ensemble des* ***sommets*** *du graphe ;*
- *$\mathscr{E}$ est un sous–ensemble de $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$, appelé ensemble des* ***arêtes orientées*** *du graphe ;*
- *p est une application de $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}_+$ appelée* ***distribution*** *du graphe.*

On suppose de plus que :

- $\forall x, y \in \mathscr{S}, (p(x, y) \neq 0) \Leftrightarrow ((x, y) \in \mathscr{E})$;
- $\forall x \in \mathscr{S}$,
$$\sum_{y \in \mathscr{S}} p(x, y) = 1 \ .$$

Comme précédemment, il peut être utile de se donner une représentation graphique de ces objets. Ici, les arêtes (x, y) et (y, x) étant deux objets distincts pour des sommets $x, y \in \mathscr{S}$, on les représentera à l'aide d'une flèche entre x et y, au dessus de laquelle on écrira la valeur de $p(x, y)$.



– II –

On fixe dans cette partie un graphe probabiliste $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{E}, p)$.

1. Justifier que p est à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Soit $x \in \mathscr{S}$.
   (a) Montrer que l'application suivante est une probabilité :
$$p_x : \mathscr{P}(\mathscr{S}) \to [0,1]$$
$$A \mapsto \sum_{y \in A} p(x, y) \; .$$
   (b) Quels sont les événements de probabilité nulle pour p_x ?

Définition 6.

> *Soit $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{E}, p)$ un graphe probabiliste. On suppose que $\mathscr{S}$ est donné sous la forme d'une suite ordonnée finie, i.e $\mathscr{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. On appelle **matrice de transition** de $\mathscr{G}$ la matrice $T = (t_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit :*
>
> $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad t_{i,j} = p(s_i, s_j) \; .$$

3. En ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique, donner la matrice de transition du graphe dessiné page 2.
4. On suppose que $\mathscr{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ et on note $T = (t_{i,j})_{i,j}$ la matrice de transition du graphe $\mathscr{G}$.
   (a) T est–elle nécessairement symétrique ?
   (b) Interpréter, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, les sommes suivantes :
$$L_i = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} \quad \text{et} \quad C_j = \sum_{k=1}^{n} t_{k,j} \; .$$

– III –

On considère dans cette partie une expérience aléatoire à $k \geq 1$ issues possibles $A_1, \dots, A_k$, que l'on répète *ad infinitum* dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On note, pour $i \in [\![1, k]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{i,n}$ la probabilité d'obtenir l'issue A_i lors de la n–ième répétition de l'expérience et on pose $P_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,k}(\mathbb{R})$. Cette matrice est appelée n–ième **état probabiliste** de l'expérience. On pose également

$$P_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_1) & \mathbb{P}(A_2) & \dots & \mathbb{P}(A_k) \end{pmatrix} .$$

On suppose l'expérience aléatoire modélisé par un graphe probabiliste $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{A}, p)$ de la façon suivante :

- on pose $\mathscr{S} = \{A_1, \dots, A_k\}$;
- pour tous $i, j \in [\![1, k]\!]$, $p(A_i, A_j)$ est égale à la probabilité d'obtenir A_j lors d'une répétition de l'expérience si A_i avait été l'issue de la répétition précédente.

Ceci implique en particulier que l'issue d'une répétition de l'expérience ne dépend que de la répétition précédente.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{i,n} = 1$.
2. Démontrer que si on note M la matrice de transition du graphe $\mathscr{G}$ on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = P_n M = P_0 M^n .$$
3. On appelle **état stable** un état probabiliste P_N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $P_n = P_N$.
   (a) Démontrer qu'un état probabiliste P_N est stable si et seulement si il est solution du système linéaire $P_N = P_N M$.
   (b) On considère une expérience modélisée par le graphe probabiliste de matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.1 & 0.75 & 0.1 & 0.05 \\ 0.55 & 0 & 0 & 0.45 \end{pmatrix} .$$
   Dessiner ce graphe et déterminer si l'expérience admet un état stable, que l'on explicitera le cas échéant.