

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

◆ Problème : extrait ENS PC 2024

– I –

1. On a $\det(R) \det(R^\top) = \det(I_d)$ ce qui donne $\det(R)^2 = 1$ avec $\det(R) \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.
2. Cf. cours.
3. (a) Soit $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in M_d(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \text{tr}((Av)^\top u) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{i,j} v_j u_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle uv^\top, A \rangle &= \langle A, uv^\top \rangle \\ &= \text{tr}(A^\top uv^\top) \\ &= \sum_{i=1}^d (A^\top u)_{i,1} v_{1,i} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{j,i} u_j v_i \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle$.

- (b) Cf. cours (encore!).
- (c) Pour $A, B, C \in M_d(\mathbb{R})$,

$$\langle A, BC \rangle = \text{tr}(C^\top B^\top A) = \langle B^\top A, C \rangle$$

et

$$\langle A, BC \rangle = \text{tr}(C^\top B^\top A) = \text{tr}(AC^\top B^\top) = \langle AC^\top, B \rangle.$$

4. (a) Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$. La relation $(RR^\top)_{i,i} = 1$ donne

$$\sum_{k=1}^d R_{i,k}^2 = 1$$

Comme R est à coefficients réels, ceci donne $R_{i,i}^2 \leq 1$, d'où le résultat.

- (b) On a :

$$\langle D, R \rangle = \sum_{k=1}^d \alpha_k R_{k,k}$$

D'où

$$|\langle D, R \rangle| \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k |R_{k,k}| \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k = \text{tr}(D)$$

d'après le résultat de la question précédente.

– II –

1. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |R(a - b)| = |a - b|$$

car $M \in O_d(\mathbb{R})$.

- (b) Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ notés $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Il est évident que $g = g'$ implique $\phi_g = \phi_{g'}$.

Supposons que $\phi_g = \phi_{g'}$. En évaluant en $x = 0$, on obtient $\tau = \tau'$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^d, (R - R')x = 0$, ce qui donne $R = R'$ (car la matrice $R - R'$ est de rang nul).

Finalement $g = g'$, ce qui achève d'établir l'équivalence voulue.

- (c) En posant $e = (0, I_d)$, on a $\phi_e = id_{\mathbb{R}^d}$, et c'est le seul d'après la question précédente.

2. (a) Soit $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ notés $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \phi_{g'}(\phi_g(x)) &= R'(Rx + \tau) + \tau' \\ &= R'Rx + (R'\tau + \tau') \end{aligned}$$

En posant $g'' = (R'\tau + \tau', R'R)$, on a bien $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

L'unicité est garantie par le résultat de la 1.(b).

- (b) Pour $g_1, g_2, g_3 \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, l'associativité de la composition donne :

$$\phi_{g_1} \circ \phi_{g_2 g_3} = \phi_{g_1 g_2} \circ \phi_{g_3}$$

c'est-à-dire

$$\phi_{g_1(g_2 g_3)} = \phi_{(g_1 g_2)g_3}$$

D'après le résultat de la 1.(b), ceci donne $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$.

3. (a) On note $g = (\tau, R)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\phi_g(x) = y \iff Rx = y - \tau \iff x = R^\top(y - \tau)$$

Ainsi, tout $y \in \mathbb{R}^d$ admet un unique antécédent $x \in \mathbb{R}^d$ par ϕ_g , ce qui démontre la bijectivité de celle-ci.

- (b) Reprenant les mêmes notations qu'à la réponse précédente, le calcul mené donne $\phi_g(x) = y \iff y = \phi_{g'}(x)$ avec $g' = (-R^\top \tau, R^\top)$.

Ainsi $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$ et ce g' est unique d'après 1.(b).

- (c) Pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\phi_{ge} = \phi_g \circ \phi_e = \phi_g$$

et $\phi_{eg} = \phi_g$ par le même calcul. Le résultat de la 1.(b) donne alors $ge = eg = g$.

De même, pour tout $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi_{gg^{-1}} = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_g \circ \phi_g^{-1} = id = \phi_e$$

d'où $gg^{-1} = e$ d'après 1.(b).

On obtient $g^{-1}g = e$ de la même manière.

4. Si $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall R, R' \in SO_d(\mathbb{R}), \forall \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d, RR' = R'R \text{ et } R'\tau + \tau' = R\tau + \tau \quad (\star)$$

La seconde égalité donne, pour $\tau = 0$,

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^d, Rx = x$$

Ainsi, $SO_d(\mathbb{R})$ se réduit à I_d , ce qui impose $d = 1$.

Réciproquement, pour $d = 1$, on a bien les conditions (\star) .

Ainsi on a $(\forall g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d), g'g = gg')$ si et seulement si $d = 1$.