

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

◆ Problème : extrait ENS PC 2024

- Dans toute la suite, d désignera un entier strictement positif. On désignera par $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des matrices carrées de taille $d \times d$ à coefficients dans \mathbb{R} . Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on notera

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

où $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^d M_{ii}$ est la trace de la matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et A^\top sa transposée. Selon la convention habituelle, M_{ij} désigne le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice M pour tout $1 \leq i, j \leq d$.

- Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, on notera $|u|$ sa norme euclidienne canonique. Un tel vecteur sera identifié à une matrice colonne et u^\top sera la matrice ligne associée. On notera $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top v$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d lorsque u et v sont dans \mathbb{R}^d . En particulier on aura $|u|^2 = \langle u, u \rangle_{\mathbb{R}^d} = u^\top u$.
- On notera I_d la matrice identité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On désignera par

$$O_d(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid M^\top M = I_d\}$$

le groupe orthogonal sur \mathbb{R}^d et par

$$SO_d(\mathbb{R}) = \{M \in O_d(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

le groupe spécial orthogonal, où $\det(M)$ désigne le déterminant de $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On admettra que ces deux ensembles sont des sous-groupes de $GL_d(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall M \in O_d(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |Mx| = |x|.$$

. On notera également

$$\text{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times SO_d(\mathbb{R})$$

- Pour toute famille $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ de vecteurs de \mathbb{R}^d , on notera $A = (a_1 | \dots | a_d)$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dont la i -ème colonne de A est formée des coordonnées du vecteur a_i .
- Pour toute famille de réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$, on notera $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$.

– I –

1. Soit $R \in O_d(\mathbb{R})$. Vérifier que $\det(R) \in \{-1, +1\}$.
2. Vérifier que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme associée.
3. (a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a $\langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle$.
(b) Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
(c) En déduire que pour tous A, B et C dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on a

$$\langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle$$

4. Soit $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une matrice diagonale à coefficients positifs et soit $R \in O_d(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $|R_{ii}| \leq 1$ où R_{ii} est le i -ème coefficient diagonal de R .
(b) En déduire que $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)$.

– II –

Pour tout $g = (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on note $\phi_g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application définie par

$$\phi_g(x) = Rx + \tau$$

On dira que lorsque $\tau = 0$, ϕ_g est une rotation vectorielle de l'espace \mathbb{R}^d , et lorsque $R = I_d$, que ϕ_g est une translation. Dans le cas général, on dira que ϕ_g est un déplacement de l'espace \mathbb{R}^d .

1. (a) Vérifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $|\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|$.
(b) Montrer pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, on a $\phi_g = \phi_{g'}$ si et seulement si $g = g'$.
(c) Montrer qu'il existe un unique $e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que ϕ_e soit l'application identité sur \mathbb{R}^d c'est-à-dire que $\phi_e(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
2. (a) Vérifier que pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$. On notera $g'g$ cet élément dans la suite.

(b) Vérifier que pour tous g_1, g_2 et g_3 dans $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ on a $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.
3. Soit $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.
(a) Montrer que ϕ_g est bijective. On note ϕ_g^{-1} son application réciproque.
(b) Montrer qu'il existe un unique $g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, que l'on explicitera en fonction de g , tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. On notera $g' = g^{-1}$.
(c) Vérifier que $ge = eg = g$ puis que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
4. Pour quelles valeurs de d a-t-on $gg' = g'g$ pour tous $g, g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$?