

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

◆ Exercice 1 : banque CCINP

Il s'agit du CCINP 5.

◆ Exercice 2 : CCINP TSI 2024

1. On dit qu'une série converge si la suite de ses sommes partielles converge.
2. Il faut et suffit que $\alpha > 1$ (critère de Riemann).
3. Une brève étude de la fonction $x \mapsto e^x - (1+x)$ livre le résultat.
4. On a, par produit de termes positifs :

$$e^{H_n} = e^{(1+\dots+\frac{1}{n})} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \dots e^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

et

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = (n+1).$$

In fine, on a bien : $\forall n \geq 1, e^{H_n} \geq n+1$

5. Puisque $e^{H_n} \geq (n+1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$, on obtient par minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$.

Par composée de limite (fonction continue), on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

6. La variable Z_n compte le nombre de fois où la boule noire est apparue au cours des n premiers tirages.
7. X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$: au moment du k -ième tirage, on a rajouté $(k-1)$ boules blanches en plus de la noire du début. De plus :

$$E(X_k) = 0 \times \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

8. On a :

$$E(Z_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

◆ Exercice 3 : CCINP TSI 2024 (bis)

1. (a) Il s'agit d'une récurrence triviale.
- (b) On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $X^2 - X - 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 5$ et de racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. D'après le cours, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On détermine a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 1 = a + b \\ F_1 = 1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}.$$

Après calculs on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

2. On notera dans cette question, pour $n \geq 1$, $d_n = \det(M_n)$.

(a) On trouve $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ et $d_3 = 3$.

(b) On développe d_{n+2} par rapport à la dernière ligne :

$$d_{n+2} = (-1)^{(n+2+n+1)} a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + (-1)^{2(n+2)} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît le dernier déterminant (c'est d_{n+1}) et on développe le premier, par rapport à la dernière colonne. De plus $(-1)^{(n+2+n+1)} = -1$, d'où

$$d_{n+2} = (-1) a_{n+1} (-1)^{2(n+1)} b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + d_{n+1}.$$

On a bien la relation de récurrence : $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.

(c) Les suites $(d_n)_n$ et $(F_n)_n$ vérifient la même relation de récurrence double et leurs deux premiers termes sont égaux : ces deux suites sont égales.

◆ Exercice 4 : Centrale PC 2023

1. Puisque $|x| < 1$, on a $\frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^n$. Or :

$$\left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} \right| \rightarrow |x| < 1$$

Donc la série $\sum nx^n$ converge absolument par critère de d'Alembert ; d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge. Posons, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $a_{n,k} = nx^{n(1+k)} = nx^n (x^n)^k$. Pour tout n fixé, la série $\sum_{k \geq 0} a_{n,k}$ est absolument

convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{nx^n}{1-x^n}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.

2. (a) On a $\frac{1}{k^3(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^4}$ donc par équivalence, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3(k+1)}$ converge et donc,

quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est bien défini, Donc $u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$ existe bien.

(b) Posons, pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geq n \end{cases}$ qui est une famille de

nombre positifs ou nuls. On remarque que pour tout n fixé, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = u_n$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in [0, +\infty].$$

D'autre part pour k fixé on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^k \frac{n}{k^3(k+1)} = \frac{1}{k^3(k+1)} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2k^2}$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k}$ est finie et vaut $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k}$ est également finie de même somme, autrement dit $\sum_{(n \geq 1)}$

converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}$.

3. (a) Soit $i \in \mathbb{N}$ fixé, alors la série $\sum_{j \geq 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{j \geq i+1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = -1 + 1 = 0.$$

En conséquence la série de terme général $\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est la série nulle,

et donc le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est nul.

- (b) Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, alors la série $\sum_{i \geq 0} b_{i,j}$ est convergente car $(b_{i,j})_{i \geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} - 1 = \frac{1}{2^j} \frac{1-2^j}{1-2} - 1 = -\frac{1}{2^j}$$

Donc la série de terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc le nombre $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et vaut $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{-1}{2^j} = -2$.

- (c) D'après ce qui précède, les nombres $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent mais ne sont pas égaux.

4. (a) Comme précédemment, pour $i \in \mathbb{N}$ fixé la série $\sum_{j \geq 0} c_{i,j}$ est convergente car géométrique de raison $\frac{1}{3}$ à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} = i - 2i \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = i - 2i \frac{1}{3(1-\frac{1}{3})} = i - 2i \frac{1}{2} = 0$$

et ainsi le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ existe et est égal à 0.

- (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{i \geq 0} c_{i,j}$ est convergente car nulle à partir d'un certain rang, et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} (-2i3^{i-j}) + j = j - \frac{2}{3^j} \sum_{i=0}^{j-1} i3^i$$

Supposons $j \geq 1$, pour tout $x > 1$ on a $\sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{x^j - 1}{x - 1}$, ce qui définit une fonction f dérivable sur $]1, +\infty[$ telle que

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \sum_{i=1}^{j-1} ix^{i-1} = \frac{jx^{j-1}(x-1) - (x^j - 1)}{(x-1)^2}$$

En particulier $\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = 3f'(3) = 3 \frac{2j3^{j-1} - (3^j - 1)}{4}$ et ainsi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3j} \frac{2j3^j - 3(3^j - 1)}{4} = j - j + \frac{3(3^j - 1)}{2 \times 3^j} = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}},$$

ce résultat étant également valable pour $j = 0$ car dans ce cas $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0$.

Ainsi la série $\sum_{i \geq 0} c_{i,j}$ est convergente et $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}}$.

(c) On remarque que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$, la série $\sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ est donc grossièrement divergente.