

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

◆ Exercice 1 : banque CCINP

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) **Cas** $\alpha \leq 0$. En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
 - (b) **Cas** $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série. *Indication* : on pourra utiliser la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

◆ Exercice 2 : CCINP TSI 2024

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{(n \geq 1)} \frac{1}{n}$. Le but est de (re)démontrer que celle-ci est une série divergente. On donne ensuite une application probabiliste des résultats obtenus. On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Énoncer la définition de convergence pour une série $\sum u_n$ de nombres réels ou complexes.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ? *On ne demande pas de redémontrer ce résultat.*
3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

4. En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, \quad e^{H_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $e^{H_n} \geq n + 1$.

5. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$$

En déduire la divergence de la série harmonique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :

- au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche ;
- on considère les n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire définie par :

- $X_k = 0$ si la boule tirée lors du k -ième tirage est blanche ;
- $X_k = 1$ si la boule tirée lors du k -ième tirage est noire.

On définit enfin la variable Z_n par :

$$Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et on définit, pour toute variable aléatoire réelle X , l'espérance de X comme étant la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

On admettra que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

6. Que représente la variable Z_n ?
7. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaitre la loi de X_k et calculer son espérance.
8. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n .

◆ Exercice 3 : CCINP TSI 2024 (bis)

Pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère $n - 1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k) , pour k variant de 1 à n , tels que $a_k b_k = -1$ et on s'intéressera à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $M_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

1. On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1, F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, F_n est un entier naturel.
- (b) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(F_n)_n$.
2. On notera dans cette question, pour $n \geq 1$, $d_n = \det(M_n)$.
 - (a) Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3 .
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
 - (c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_n = F_n$.

◆ Exercice 4 : Centrale PC 2023

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par \mathbb{N}^2 c'est-à-dire du type

$(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$. Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$

et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On admet les deux résultats suivants :

- Si $a_{i,j} \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0, +\infty]$ et sont égales. En particulier, si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

- Si $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors

les sommes $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

1. **Un premier exemple.** Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que la série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}.$$

2. **Un deuxième exemple.** On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

- (b) Montrer que la série $\sum_{(n \geq 1)} u_n$ converge et calculer sa somme.

3. **Un premier contre-exemple.** On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

- (a) Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

- (b) Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

- (c) A-t-on $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

4. **Un deuxième contre-exemple.** On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i 3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

- (a) Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

- (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{i \geq 0} c_{i,j}$ converge et que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}}$.

- (c) Quelle est la nature de la série $\sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?