Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

⧫ Exercice 1 : banque CCINP

Il s'agit du CCINP 64.

⧫ Exercice 2 : autour de la trace d'une matrice carrée

1. (a) Il s'agit du noyau d'une forme linéaire non nulle (car $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$).
   (b) Comme $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \subset \mathbb{K}$ et que $\mathrm{rg}(Tr) = 1$ par formule du rang, on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{K}$.
2. Un calcul direct permet de vérifier que $A \cup B \subset \ker(\mathrm{Tr})$ donc par minimalité on a $\mathrm{Vect}(A \cup B) \subset \ker(\mathrm{Tr})$. Réciproquement, si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \ker(\mathrm{Tr})$ alors on a :

$$m_{1,1} = -\sum_{i=2}^{n} m_{i,i}$$

et donc :

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}(E_{i,i} - E_{1,1}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} m_{i,j}E_{i,j} \in \mathrm{Vect}(A \cup B)\,,$$

ce qui permet de conclure.
3. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors il est possible de former le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et cette matrice admet pour coefficient en position $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\sum_{c=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\sum_{c=1}^{n}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\,.$$

La somme de droite *supra* est non nulle à la seule condition que $j = k$, et égale à 1 dans ce cas, entraînant que :

$$\sum_{c=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k}$$

le produit des deux symboles de Kronecker de gauche étant reconnaissable (si, si) comme le coefficient en position (a,b) de la matrice $E_{i,\ell}$. On en déduit donc que :

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}\,.$$

4. (a) Soit $M, N \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$; alors

$$f_A(M + \lambda N) = \mathrm{Tr}(A(M + \lambda N)) = \mathrm{Tr}(AM + \lambda AN) = f_A(M) + \lambda f_A(N)\,.$$

   (b) Comme $A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}$, on a :

$$AE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}\delta_{i,\ell}E_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{j,k}$$

   et donc

$$f_A(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(A_{i,j}) = a_{j,i}\,.$$

5. On vérifie rapidement que f est linéaire : si $A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\forall M\, E, \quad f_{A+\lambda B}(M) = \mathrm{Tr}((A+\lambda B)M) = f_A(M) + \lambda f_B(M)\,.$$

De plus, si $A \in \ker(f)$ alors en particulier pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a $f_A(E_{i,j}) = 0$ et donc A est la matrice nulle d'après la question précédente. f est donc une application linéaire injective de E dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ qui sont deux espaces de même dimension finie : il s'agit bien d'un isomorphisme.

6. (a) Il s'agit d'un calcul direct (le faire par blocs) : $J_r N$ est une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont une copie des r premières lignes de N.

   (b) Comme H est un hyperplan de E il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ non nulle telle que $H = \ker(\varphi)$. D'après la question 5., il existe une matrice $A \in E$ telle que $\varphi = f_A$. En notant $r = \mathrm{rg}(A)$, on a de plus l'existence de P et Q telle que $A = PJ_rQ$. On pose alors $= Q^{-1}NP^{-1}$, et on a

$$\begin{aligned} f_A(M) &= \mathrm{Tr}\left(PJ_rQQ^{-1}NP^{-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(J_rNP^{-1}P\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(J_rN\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   donc $M \in H$. M est de plus inversible car N l'est (ses colonnes forment la base canonique de $\mathbb{K}^n$), d'où le résultat.

7. (a) ϕ admet un unique antécédent par la bijection f.

   (b) Soit $M \in E$; alors pour tout $X \in E$:

$$\begin{aligned} f_{AM-MA}(X) &= \mathrm{Tr}((AM - MA)X) \\ &= \mathrm{Tr}(AMX) - \mathrm{Tr}(MAX) \\ &= \mathrm{Tr}(AMX) - \mathrm{Tr}(AXM) \\ &= \phi(MX) - \phi(XM) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   donc $f_{AM-MA} = 0$. Par injectivité de f, on a donc $AM = MA$.

   (c) La matrice A commute avec tout E donc en particulier avec les $E_{i,j}$; *i.e* pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A$$

   soit, en notant $A = (a_{k,\ell})_{k,\ell}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell}\,.$$

   Par un calcul similaire à celui déjà mené à la question 4.(b), on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{j,k} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j,\ell}E_{i,\ell}$$

   La matrice de gauche n'a aucun coefficient non nul hors de la ligne j (qui contient la ligne i de A), celle de droite aucun coefficient non nul hors de la ligne i (qui contient la ligne j de A) ; on en déduit que si $i \neq j$ alors $a_{i,j} = 0$ et que tous les $a_{i,i}$ sont égaux. De fait, on a bien $A = \lambda I_n$ avec $\lambda = a_{1,1}$.

   (d) On a $\phi = f_A$ donc pour tout $M \in E$

$$\phi(M) = \mathrm{Tr}((\lambda I_n)M) = \lambda\mathrm{Tr}(M)$$

   ergo $\phi = \lambda\mathrm{Tr}$.

♦ Exercice 3 : matrices unipotentes (banque PT 2023)

1. (a) On a
$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$
En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de cette matrice, on a
$$\mathrm{rg}(I_3 - A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{rg}(C_1, C_2) = 2$$
car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ et car C_1, C_2 sont deux colonnes non colinéaires. La formule du rang donne alors $\dim\ker(A-1) = 1$, de quoi on déduit que $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

(b) On a
$$(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x & -y & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ -x & -y & +2z & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = & 1 & +y \\ z & = & 1 & +y \end{cases}$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \\ 1+y \end{pmatrix}$$
d'où le résultat :
$$(A - I3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \exists\, y \in \mathbb{R},\ X = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \\ 1+y \end{pmatrix}.$$

(c) On a déjà $f(e_1) = e_1 \Leftrightarrow e_1 \in E_1$ donc on prend $e_1 = (1,1,1)$.
Ensuite, on a $f(e_2) = 2e_1 + e_2 \Leftrightarrow (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2) = (2,2,2)$, donc on prend pour e_2 un vecteur de la forme $(1+y, y, 1+y)$. On peut par exemple choisir $y = 0$ ce qui donne $e_2 = (1,0,1)$.
Enfin, on a $f(e_3) = -2e_2 + e_3 \Leftrightarrow (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_3) = (-2, 0, -2)$. On résout alors le système associé :
$$(A - I_3)X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x & -y & +2z & = -1 \\ & -y & +z & = 0 \\ -x & -y & +2z & = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = & 1 & +y \\ z & = & & y \end{cases}$$
On prend alors arbitrairement $y = 0$, ce qui donne $e_3 = (1,0,0)$.

(d) Par théorème, deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes : il faut (et suffit de) trouver une base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Cela équivaut à dire que l'on a $f(u) = u,\ f(v) = 2u + v,$ et $f(w) = -2v + w$. Au vu de la question précédente, il suffit donc de montrer que e_1, e_2, e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, et alors cette base conviendra. On fait cette vérification, qui est classique (montrer qu'elle est libre et utiliser la dimension). Par formule de changement de base, il suffit de prendre P égale à la matrice de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans la base canonique, *i.e*
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Si on note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors par construction :

$$\mathscr{N} = \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})\,.$$

Cet ensemble est un s–e.v de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par définition. De plus, la famille $(E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3})$ étant libre (comme sous–famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$) et génératrice de $\mathscr{N}$, elle en constitue une base. De fait, $\dim(\mathscr{N}) = 3$.

(b) Un calcul direct montre que si $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{N}\,.$$

(c) Un calcul direct donne $N^3 = 0$.

3. (a) Non : $0 \notin \mathscr{U}$.

(b) Si $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & b'+ac'+b \\ 0 & 1 & c'+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{U}\,.$$

(c) Les matrices de $\mathscr{U}$ sont triangulaires sans coefficient diagonal nul : elles sont donc inversibles.

4. (a) On a directement

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

(b) On a $N \in \mathscr{N}$, or $\mathscr{N}$ est stable par produit et par combinaison linéaire, donc on a $\alpha N + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathscr{N}$. Cela prouve que $U^{(\alpha)} \in \mathscr{U}$.

(c) On a :

$$\begin{aligned}
U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= \left(I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)\left(I_3 + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2\right) \\
&= I_3 + (\alpha+\beta)N + \left(\alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\right)N^2 + (\cdots)\underbrace{N^3}_{O} + (\cdots)\underbrace{N^4}_{O} \text{ et} \\
&= I_3 + (\alpha+\beta)N + \left(\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}\right)N^2 \\
&= U^{(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} &= (I_3 + \underbrace{\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2}_{N'})^{(\beta)} \\
&= I_3 + \beta N' + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N'^2 \\
&= I_3 + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2 \\
&= I_3 + \alpha\beta N + \left(\frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{2}\right)N^2 + O_3 \\
&= I_3 + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha}{2}(\alpha - 1 + \alpha(\beta-1))N^2 = U^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(d) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

— En $n = 1$, on a $U^{(1)} = I_3 + N = U$, donc on a bien $U^{(1)} = U^1$.

— Pour l'hérédité, il suffit d'utiliser la propriété aux rang 1 et n, ce qui permet d'écrire : $U^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(1)} = U^nU^1 = U^{n+1}$.

Par ailleurs le résultat reste vrai si $n = 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $U^{(n)} = U^n$.

(e) Puisque $I_3 N = N I_3 = N$ la formule du binôme s'applique, et considérant que $N^k = 0$ pour $k \geq 3$ on peut écrire pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} U^n &= (\mathrm{I}_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= U^{(n)} \end{aligned}$$

Comme $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, le calcul *supra* reste valable dans les cas $n = 0, 1$.

(f) La question 4.(c) permet d'écrire $UU^{(-1)} = U^{(1)} U^{(-1)} = U^{(1-1)} = U^{(0)} = I_3$, d'où le résultat.

5. (a) Comme $B \in \mathscr{U}$, en utilisant la question 4.(c) on peut écrire : $B = B^{(1)} = \left(B^{(\frac{1}{2})}\right)^2$ donc

$$C = B^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{convient.}$$

Cette matrice n'est pas unique car $-C$ convient également.

(b) On a $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1} = (PCP^{-1})^2$ donc $D = PCP^{-1}$ convient.

♦ Exercice 4 : extrait Mines–Ponts MP/MPI 2023

1. (a) Au bout de deux IPP et d'un peu[1] de douleur on trouve, pour $n \geq 1$:

$$\int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt) dt = \frac{(2\alpha\pi + \beta)(-1)^n - \beta}{n^2}$$

et donc $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$ conviennent.

(b) Soit $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) &= e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \qquad \left(e^{it} \neq 1\right) \\ &= e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \left(\frac{-2i \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \left(\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

en se rappelant que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a $2\cos(b)\sin(a) = \sin(b+a) - \sin(b-a)$. *In fine*, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\,.$$

1. Non contractuel.

2. Il s'agit du lemme de Riemann–Lebesgue. On fixe $x > 0$ et on effectue une intégration par parties :
$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)dt = \left[-\frac{\varphi(t)\cos(xt)}{x}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\varphi'(t)\cos(xt)}{x}dt$$
et donc :
$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)dt\right| &\leq \left|\frac{\varphi(\pi)\cos(x\pi)}{x}\right| + \left|\frac{\varphi(0)}{x}\right| + \int_0^\pi \left|\frac{\varphi'(t)\cos(xt)}{x}\right| dt \\ &\leq \frac{1}{x}\left(|\varphi(\pi)| + |\varphi(0)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)|\, dt\right) \end{aligned}$$
ce qui permet d'obtenir le résultat par théorème d'existence par encadrement.

3. (a) La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ en tant que fraction rationnelle en fonctions usuelles et :
$$\forall t \in]0,\pi], \quad \varphi'(t) = \frac{(2\alpha t+\beta)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$
De plus, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\beta t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \beta$ et
$$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{(2\alpha t+\beta)\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\alpha t^2+\beta t\right)\left(1-\frac{t^2}{8}\right) + o\left(t^2\right)}{\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)} \xrightarrow[t\to 0]{} \alpha$$
et donc par théorème de limite de la dérivée, comme φ et φ' se prolongent par continuité en 0, φ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

   (b) Soit $N \geq 1$; alors d'après la question 1 on a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^N \int_0^\pi \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(\alpha t^2+\beta t\right)\left(\sum_{n=1}^N \cos(nt)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(\alpha t^2+\beta t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^\pi \overline{\varphi}(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{\alpha t^2+\beta t}{2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$
où $\overline{\varphi}$ est le prolongement $\mathscr{C}^1$ de φ étudié à la question 3.(a). Or, par lemme de Riemann–Lebesgue (question 2.) on a :
$$\int_0^\pi \overline{\varphi}(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$
et donc par unicité de la limite :
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = -\int_0^\pi \frac{\alpha t^2+\beta t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$
en remplaçant α et β par les valeurs trouvées à la question 1.(a).