Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

♦ Exercice 1 : banque CCINP

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

♦ Exercice 2 : autour de la trace d'une matrice carrée

Dans tout ce problème, E représente l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{K}$. On notera $(E_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de cet espace. Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, on rappelle que l'on appelle **trace** de A le scalaire

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

obtenu en sommant ses coefficients diagonaux.

1. (a) Justifier que $\ker(\operatorname{Tr})$ est un hyperplan de E.
   (b) Déterminer $\operatorname{Im}(\operatorname{Tr})$.
2. On pose $A = \{E_{i,j} \mid i, j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j\}$, $B = \{E_{i,i} - E_{1,1} \mid i \in [\![1,n]\!]\}$. Démontrer que
$$\ker(\operatorname{Tr}) = \operatorname{Vect}(A \cup B)\,.$$
3. Démontrer que, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1,n]\!]$, on a :
$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$$
4. Soit $A \in E$; on pose
$$\begin{aligned} f_A : E &\to \mathbb{K} \\ M &\mapsto \operatorname{Tr}(AM)\ . \end{aligned}$$
   (a) Montrer que $f_A \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
   (b) Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$; démontrer que
$$f_A(E_{i,j}) = a_{j,i}\ ,$$
   où $a_{j,i}$ est le coefficient situé ligne j et colonne i dans la matrice A.
5. Établir que l'application
$$\begin{aligned} f : E &\to \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$
   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

6. On fixe dans cette question un hyperplan H de E.
   (a) Pour $r \in [\![1, n]\!]$, vérifier que si on pose
   $$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   alors $\mathrm{Tr}(J_r N) = 0$.
   (b) Démontrer que H contient une matrice inversible.
7. Soit $\phi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que
   $$\forall\, M, N \in E, \quad \phi(MN) = \phi(NM)\,.$$
   (a) Justifier qu'il existe un unique $A \in E$ tel que $\phi = f_A$.
   (b) Démontrer que pour tout $M \in E$, f_{AM-MA} est l'application nulle. Qu'en conclure quant aux matrices AM et MA ?
   (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \mathrm{I}_n$.
   (d) Conclure en justifiant que $\phi = \lambda \mathrm{Tr}$.

⧫ Exercice 3 : matrices unipotentes (banque PT 2023)

On considère l'ensemble $\mathscr{N}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme
$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\,.$$

On considère également l'ensemble $\mathscr{U}$ des matrices $U \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme $U = I_3 + N$, avec $N \in \mathscr{N}$. Ces matrices seront dites **unipotentes**. Autrement dit, pour toute matrice $U \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ on a :
$$U \in \mathscr{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.**
   On considère les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   .
   (a) Déterminer $\ker(A - I_3)$.
   (b) Résoudre l'équation $(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que
   $$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$
   On pourra utiliser la question précédente.
   (d) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.
2. **Étude de $\mathscr{N}$.**
   (a) Montrer que $\mathscr{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.

   (b) Montrer que $\mathscr{N}$ est stable par produit, *i.e* que pour tout $(N, M) \in \mathscr{N}^2$, on a $NM \in \mathscr{N}$.
   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathscr{N}$.

3. Étude de $\mathscr{U}$.
   (a) L'ensemble $\mathscr{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $\mathscr{U}$ est stable par produit.
   (c) Montrer que $\mathscr{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $U \in \mathscr{U}$ et $N \in \mathscr{N}$ telles que $U = I_3 + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une ***notation*** *: il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.*

   (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, où B est la matrice définie à la question 1.
   (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathscr{U}$.
   (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

   (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
   (f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4 , expliciter une matrice $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
   (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

♦ Exercice 4 : extrait Mines–Ponts MP/MPI 2023

On rappelle que la quantité suivante est bien définie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer une valeur explicite de cette somme **sans utiliser de théorème relatif aux séries numériques**.

1. (a) Déterminer deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

   (b) Démontrer que pour tout $t \in]0, \pi]$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que si φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt) \mathrm{d}t = 0.$$

3. (a) Établir que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\alpha t^2 + \beta t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, où α et β sont les réels déterminés à la question 1.(a), se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
   (b) En faisant la synthèse des questions précédentes, démontrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$