

*Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.*

## ◆ Exercice 1 : banque CCINP

Il s'agit du CCINP 60.

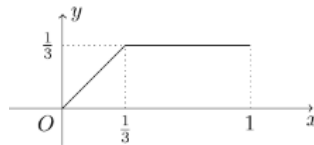
## ◆ Exercice 2 : E3A PSI 2024

1. On distingue trois cas :

- $\alpha < 0$ , i.e  $\alpha = -\omega^2$ , où  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$  : la solution générale s'écrit alors  $y : t \in \mathbb{R} \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux réels arbitraires.
- $\alpha = 0$  : la solution générale s'écrit alors  $y : t \in \mathbb{R} \mapsto At + B$ , où  $A$  et  $B$  sont deux réels arbitraires.
- $\alpha > 0$ , i.e  $\alpha = \omega^2$ , où  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$  : la solution générale s'écrit alors  $y : t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{ch}(\omega t) + B \operatorname{sh}(\omega t)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux réels arbitraires.

2. D'après le théorème fondamental du calcul intégral,  $H$  est la primitive nulle en  $a$  de la fonction continue  $h$ . A ce titre, elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , et sa dérivée est la fonction  $h$ .

3. (a) La fonction est aussi définie par  $t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} t & \text{si} \\ \frac{1}{3} & \text{sinon} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ .



(b) On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt &= \int_0^{\frac{1}{3}} \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} t dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

(c) Plus généralement, toujours avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min(x, t) dt &= \int_0^x \min(x, t) dt + \int_x^1 \min(x, t) dt \\ &= \int_0^x t dt + \int_x^1 x dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + x \cdot (1 - x) \\ &= \frac{x^2}{2} + x - x^2 \\ &= \frac{1}{2}x(2 - x). \end{aligned}$$

4. (a) Tout d'abord, pour tout  $x \in [0, 1]$ , la fonction  $t \mapsto \min(x, t)$  est définie et continue sur  $[0, 1]$  (vérifier les limites à droite et gauche en  $x$ ), donc il en est de même de  $t \mapsto \min(x, t)f(t)$ , et l'intégrale  $\min(x, t)f(t)$  existe : la fonction  $F$  est bien définie sur  $[0, 1]$ . Ensuite, par la relation de Chasles, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \min(x, t)f(t)dt + \int_x^1 \min(x, t)f(t)dt \\ &= \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 f(t)dt. \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$  étant la primitive nulle en 0 de  $t \mapsto tf(t)$ , elle est de classe  $C^1$  et a pour dérivée  $x \mapsto xf(x)$ . La fonction  $x \mapsto \int_x^1 f(t)dt = \int_1^x -f(t)dt$  est la primitive nulle en 1 de  $t \mapsto -f(t)$ ; elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  et a pour dérivée  $-f$ . Ainsi  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme combinaison de telles fonctions, et, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

- (b) On trouve  $F(0) = F'(1) = 0$ .  
 (c) D'après l'expression de  $F'$  obtenue à la question 4.,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  et  $F'' = -f$ .
5.  $T$  est linéaire, par linéarité de l'intégrale, et, pour tout  $f \in E$ ,  $T(f)$  est la fonction  $F$  étudiée à la question 4., qui est en particulier continue sur  $[0, 1]$ . Donc  $T$  est bien un endomorphisme de  $E$ .
6. Si, pour  $f \in E$ ,  $T(f)$  est la fonction nulle, alors  $T(f)''$  est aussi la fonction nulle. Or, d'après la question 4.,  $T(f)'' = -f$  :  $f$  est donc la fonction nulle. Ainsi,  $\ker(T) = \{0_E\}$  et  $T$  est un endomorphisme injectif de  $E$ .
7. (a) C'est le résultat de la question 4.(b).  
 (b) D'après la question 4, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} T(G'')(x) &= \int_0^x tG''(t)dt + x \int_x^1 G''(t)dt \\ &= [tG'(t)]_0^x - \int_0^x G'(t)dt + x [G'(t)]_x^1 \\ &= xG'(x) - G(x) + G(0) + x(G'(1) - G'(x)) \\ &= -G(x). \end{aligned}$$

Finalement,  $T(G'') = -G$ .

- (c) Soit  $G \in A$ . D'après la question précédente,  $G = T(-G'') \in \text{Im}(T)$ . Finalement,  $\text{Im}(T) = A$ .
8. (a) La question 6 permet d'affirmer que, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ , alors  $\lambda$  est non nulle. Supposons ensuite par l'absurde que  $T$  admette une valeur propre  $\lambda$  strictement négative, et notons  $f \in E$  un vecteur propre associé. Puisque  $T(f)'' = -f$ , et  $T(f) = \lambda f$ , alors  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - \omega^2 y = 0, \text{ où } \omega^2 = -\frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$f(t) = A \text{ch}(\omega t) + B \text{sh}(\omega t).$$

Or  $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$ , donc  $f(0) = f'(1) = 0$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} A & = 0 \\ -A \text{sh}(\omega) + B \text{ch}(\omega) & = 0 \end{cases}$$

ou encore  $A = B = 0$ , soit  $f = 0$ , ce qui n'est pas possible.

Finalement, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

- (b) Soit  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ . D'après la question précédente, il existe un réel  $\omega > 0$  tel que  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ . Soit  $f \in E$  non nulle associée à cette valeur propre  $\lambda$ . Comme dans la question précédente, puisque  $T(f)'' = -f$  et  $T(f) = \lambda f$ , alors  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ , et il existe deux réels  $A$  et  $B$  tel que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . Or  $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$ , donc  $f(0) = f'(1) = 0$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} A & = 0 \\ -A \sin(\omega) + B \cos(\omega) & = 0 \end{cases}$$

ou encore  $A = B \cos(\omega) = 0$ . Donc, si  $\cos(\omega) \neq 0$ ,  $f = 0$ , ce qui n'est bien sûr pas possible. Sinon,  $f$  est de la forme  $t \mapsto B \sin(\omega t)$ , où  $B$  est un réel non nul. Dans ce cas, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= B \left( \int_0^x t \sin(\omega t) dt + x \int_x^1 \sin(\omega t) dt \right) \\ &= B \left( \left[ -t \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^x + \frac{1}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t) dt + x \left[ -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_x^1 \right) \\ &= B \left( \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega x) - x \frac{\cos(\omega)}{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2} B \sin(\omega x) \text{ car } \cos(\omega) = 0 \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

et  $f$  vérifie bien  $T(f) = \lambda f$ . Finalement, les valeurs propres de  $T$  sont les réels  $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

- (c) Pour chacune de ses valeurs propres  $\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$ , le sous-espace  $E_\lambda(T)$  est la droite de  $E$  engendrée par la fonction  $t \mapsto \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)t\right)$ , de dimension 1.