Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

⧫ Exercice 1 : banque CCINP

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

⧫ Exercice 2 : E3A PSI 2024

On se place dans cet exercice dans l'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur le segment $[0,1]$. On rappelle que pour $x, t \in [0,1]$ on pose :

$$\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t\,; \\ t & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de α, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.
2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et déterminer sa dérivée.
3. **Cas particuliers.**
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\mathrm{d}t$.
   (c) Soit x un réel de $[0,1]$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\mathrm{d}t$ en fonction de x.
4. Soit $f \in E$.
   (a) Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.
   (c) Démontrer alors que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et que $F'' = -f$.

À toute fonction f de E, on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t\,.$$

5. Montrer que T est un endomorphisme de E.
6. L'application T est-elle injective ?
7. On pose $A = \left\{G \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid G(0) = G'(1) = 0\right\}$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(T) \subset A$.
   (b) Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.
   (c) Déterminer $\operatorname{Im}(T)$.

8. **Recherche des éléments propres de T.** On dira qu'un réel λ est une **valeur propre** de T si il existe une fonction $f \in E$ *non nulle* telle que $T(f) = \lambda f$.
   (a) Démontrer par l'absurde que, si λ est une valeur propre de T, alors λ est strictement positive. *On pourra utiliser la question 4.*
   (b) Déterminer les valeurs propres de T. *On pourra aussi utiliser la question 4.*
   (c) Pour chaque valeur propre λ de T, démontrer que l'ensemble

$$E_\lambda(T) = \{f \in E \,|\, T(f) = \lambda f\}$$

   est un sous–espace vectoriel de dimension finie de E dont on déterminera une base.