Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

⧫ Exercice 1 : banque CCINP

Il s'agit du CCINP 62.

⧫ Exercice 2 : extrait de E3A MP 2023

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(x) = f(x)$.
2. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\ du = \frac{1}{x}F(x)$$

3. $\Psi(f)(0) = \displaystyle\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0)$.
4. Ψ est linéaire , d'après la linéarité de l'intégrale, et $\forall f \in E$ on a $\Psi(f) \in E$ donc $\Psi(f)$ est un endomorphisme de E.
5. (a) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$, donc h est continue en 0 et elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) On a $\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'admet pas de limite en 0 (contraposer la caractérisation séquentielle de la limite) , h n'est pas dérivable en 0 , donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$, il existe $f \in E$ telle que $\Psi(f) = g$, donc $g(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$.
   Ainsi $xg(x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc la fonction $x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) h n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $h \notin \mathrm{Im}(\Psi)$.
   (e) $\mathrm{Im}(\Psi) \neq E$ donc Ψ n'est pas surjective .
6. Soit $f \in \ker\Psi$, on a pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\Psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$ donc

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

   par dérivation on a $f(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, la continuité de f donne $f(0) = 0$ puis f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
   Donc $\ker\Psi = \{0\}$ et Ψ est injective.
7. (a) Soit $\mu \in \mathbb{R}$.Les solutions de (L) : $y' + \dfrac{\mu}{x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$y = A\exp(-\int \frac{\mu}{x}dx) = Ax^{-\mu}\ ,\ A \in \mathbb{R}$$

   (b) Les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$ sont :

$$y = Ax^{-\mu}\ \text{ si } \mu \leq 0\ \text{ ou } y = 0\ \text{ si } \mu > 0$$

   (c) Soit (λ, f) un tel couple avec $\lambda \neq 0$ et f non nulle.
   Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}F(x) = \lambda f(x)$$

donc F est solution de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{\lambda x} y = 0$$

et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = Ax^{\frac{1}{\lambda}}$.
F est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lambda > 0$, de plus F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ alors $\dfrac{1}{\lambda} \geq 1$, soit $1 \leq \lambda$.
Ainsi les λ possibles sont tous les éléments de $]0, 1]$ associés aux fonctions $x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1}$

⧫ Problème : Autour des homothéties et du lemme de Schur

– I –

1. (a) On vérifie rapidement que $\Lambda(E)$ est une partie de $\mathscr{L}(E)$ contenant $x \mapsto 0$. De plus, si f et g sont des homothéties, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda \mathrm{id}_E$ et $g = \mu \mathrm{id}_E$ donc pour tout $\nu \in \mathbb{K}$:

$$f + \nu g = (\lambda + \nu\mu)\mathrm{id}_E \in \Lambda(E)\,.$$

   (b) $\Lambda(E)$ est une partie de $\mathscr{L}(E)$ contenant id_E. De plus, si f et g sont des homothéties, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda \mathrm{id}_E$ et $g = \mu \mathrm{id}_E$ donc pour tout $x \in E$:

$$f \circ g(x) = \lambda\mu x = g \circ f(x)$$

   donc $f \circ g \in \Lambda(E)$ et est égal $g \circ f$: on a bien un sous–anneau commutatif de $\mathscr{L}(E)$.

2. On fixe dans cette question une homothétie $u \in \Lambda(E)$.
   (a) Soient λ et μ deux rapports de u ; alors comme il existe un vecteur $x \in E$ non nul, on a :

$$0 = f(x) - f(x) = (\lambda - \mu)x$$

   et donc $\lambda = \mu$ car $x \neq 0$.

   (b) Si le rapport de u est nul, $u = 0$ n'est pas bijectif. Sinon, en notant λ ce rapport, on vérifie que $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$ est la réciproque de u, qui est donc un automorphisme. Notons que cela entraîne que $\Lambda(E)$ est un corps.

3. Pour tout x non nul, la liaison de la famille $(x, f(x))$ permet d'écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$ unique. Soient x, y non nuls.
   — **Cas** (x, y) **liée :** On peut écrire $y = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$ et alors

$$f(y) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \text{ et } f(y) = \lambda_y y$$

   donc $\lambda_y = \lambda_x$.
   — **Cas** (x, y) **libre :**

$$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

   donc $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des scalaires facteurs dans une famille libre. On pose λ la valeur commune des λ_x. On a donc

$$\forall x \in E \backslash \{0_E\}\,, f(x) = \lambda x$$

   et cette relation vaut aussi pour $x = 0_E$. On peut alors conclure $f = \lambda \mathrm{id_E}$.

– II –

1. Il est clair que $\lambda \mathrm{id}_E \in \mathscr{A}_\lambda$.
2. Soit $u \in \mathscr{A}_\lambda \cap GL(E)$. On a alors $u^2 = \lambda u$ et donc, en composant par u^{-1} des deux cotés de l'égalité $u = \lambda \mathrm{id}_E$. Si $\lambda = 0$, cette égalité est impossible donc $\mathscr{A}_\lambda \cap GL(E)$ est vide ; sinon $\mathscr{A}_\lambda \cap GL(E) = \{\lambda \mathrm{id}_E\}$.

3. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et donc
$$u(x) = u^2(y) = \lambda u(y) = \lambda x\,.$$
(b) Un élément x commun à $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker(u)$ vérifie $u(x) = 0$ et $u(x) = \lambda x$ d'après la question précédente. On a donc $\ker u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. De plus, tout vecteur x de E peut s'écrire
$$x = \underbrace{\left(x - \frac{1}{\lambda}u(x)\right)}_{\in \ker(u)} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}$$
d'où le résultat.
(c) On a dans ce cas $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ par question 3.(a) et donc cela ne sera possible que si $u = 0$.

4. (a) Le sens indirect est trivial. Inversement, en composant $u \circ v + v \circ u = 0$ par u à gauche et à droite on obtient :
$$u^2 \circ v + u \circ v \circ u = 0 \quad \text{et} \quad u \circ v \circ u + v \circ u^2 = 0$$
et donc
$$\lambda u \circ v + u \circ v \circ u = 0 \quad \text{et} \quad u \circ v \circ u + \lambda v \circ u = 0\,.$$
En soustrayant ces deux égalités, on obtient (comme $\lambda \neq 0$) $u \circ v = v \circ u$, d'où le résultat.
(b) On a :
$$\begin{aligned}(u + v \in \mathscr{A}_\lambda) &\Longleftrightarrow ((u + v)^2 = \lambda(u + v))\\ &\Longleftrightarrow (u^2 + v^2 + u \circ v + v \circ u = \lambda u + \lambda v)\\ &\Longleftrightarrow (u \circ v + v \circ u = 0)\\ &\Longleftrightarrow (u \circ v = v \circ u = 0)\end{aligned}$$
d'après la question précédente.
(c) Supposons $u+v \in \mathscr{A}_\lambda$. On a déjà vu en TD que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. Pour l'inclusion inverse, remarquons que si $x = u(y) \in \mathrm{Im}\, u$, alors $x = \dfrac{1}{\lambda}(u+v)(u(y)) \in \mathrm{Im}(u+v)$, donc $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}(u + v)$. De même, $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}(u + v)$, et donc $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}(u + v)$.
On vérifie rapidement que $\ker(u) \cap \ker v \subset \ker(u + v)$. Ensuite, remarquons que si $x \in \ker(u + v)$, alors en composant à gauche par u, on a $\lambda u(x) = 0$ et donc, puisque $\lambda \neq 0$, $x \in \ker(u)$. De même $x \in \ker(v)$, donc $\ker(u + v) \subset \ker(u) \cap \ker(v)$.
(d) Comme $u \circ v = v \circ u$, alors
$$(u \circ v)^2 = u \circ v \circ u \circ v = u^2 \circ v^2 = \lambda^2 uv$$
donc $u \circ v \in \mathscr{A}_{\lambda^2}$.
On a ensuite immédiatement que $\mathrm{Im}\, u \circ v \subset \mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u \circ v \subset \mathrm{Im}\, v$(puisque $u \circ v = v \circ u$) donc $\mathrm{Im}\, u \circ v \subset \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v$.
Si $x = u(y) = v(z) \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v$, alors $\lambda x = u(x) = u(v(z))$. Puisque $\lambda \neq 0$, $x \in \mathrm{Im}\, u \circ v$ et donc $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Im}\, u \circ v$.
On a rapidement $\ker(v) \subset \ker(u \circ v)$ et $\ker(u) \subset \ker(u \circ v)$ (puisque $u \circ v = v \circ u$), donc $\ker(u) + \ker(v) \subset \ker(u \circ v)$.
Si $x \in \ker(u \circ v)$, alors
$$x = \underbrace{\left(x - \frac{1}{\lambda}u(x)\right)}_{\in \ker(u)} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}u(x)}_{\in \ker(v)},$$
et donc $\ker(u \circ v) \subset \ker(u) + \ker(v)$.

– III –

1. (a) Soit F un s–e.v de E $GL(E)$–stable différent de $\{0\}$; il existe alors un vecteur $x \in F$ tel que $x \neq 0$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$; alors comme la famille (x) est libre il existe une application $u \in GL(E)$ telle que $u(x) = y$ (envoyer $\mathrm{Vect}(x)$ sur $\mathrm{Vect}(y)$ de façon bijective et induire l'identité ailleurs), donc $y \in F$. *In fine*, $F = E$ et donc $GL(E)$ est irréductible.

   (b) Si E est une droite, tout va bien. Sinon, E contient deux vecteurs non colinéaires x et y et donc $F = \mathrm{Vect}(x)$ est $\Lambda(E)$–stable sans être égal à E ou $\{0\}$.

2. Comme f est non nulle, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ et $\ker(f) \neq E$. Or, pour tout $u \in \mathscr{U}$, on a, si $x \in \ker(f)$:

$$f(u(x)) = v(f(x)) = v(0) = 0 \text{ et donc } u(x) \in \ker(f)$$

   ainsi que

$$\forall x \in E, \quad u(f(x)) = f(w(x)) \in \mathrm{Im}(f)\,.$$

   On en déduit que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont $\mathscr{U}$–stables et donc nécessairement $\ker(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E$: on a bien $f \in GL(E)$.

3. Par hypothèse, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Ainsi, $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ et donc $f - \lambda \mathrm{id}_E \notin GL(E)$. Or, si $u \in \mathscr{U}$ on a :

$$u \circ (f - \lambda \mathrm{id}_E)) = u \circ f - \lambda u = f \circ u - \lambda u = (f - \lambda \mathrm{id}_E)) \circ u$$

   et donc par lemme de Schur, $f - \lambda \mathrm{id}_E = 0$ *i.e* $f = \lambda \mathrm{id}_E \in \Lambda(E)$.

4. Soit $s \in G$ et $x \in E \setminus \{0\}$ tes que $\varphi(s)$ stabilise $\mathrm{Vect}(x)$. Comme G est abélien alors, pour tout $v \in \varphi(G)$, comme il existe $t \in G$ tel que $\varphi(t) = v$ on a :

$$\varphi(s) \circ v = \varphi(s) \circ \varphi(t) = \varphi(s \cdot t) = \varphi(t \cdot s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s) = v \circ \varphi(s)\,.$$

   On peut donc appliquer la question précédente à $\varphi(s)$ et x, et obtenir que $\varphi(s) \in \Lambda(E)$. Ce résultat étant valable pour tout $s \in G$, on en déduit que $\varphi(G) \subset \Lambda(E)$. Comme $\varphi(G)$ est irréductible et qu'il est clair que tout ensemble contenant une partie irréductible l'est également, la question 1.(b) nous indique que E est une droite.