Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

⧫ Exercice 1 : banque CCINP

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

⧫ Exercice 2 : extrait de E3A MP 2023

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)du$.

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$. On admet que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.
3. Donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.
4. Montre que Ψ est un endomorphisme de E.
5. **Surjectivité de Ψ**
   Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_{+.}$.
   (b) La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (c) Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
   Montrer que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{+.}$.
   (d) A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?
   (e) Conclure.
6. Montrer que Ψ est injective.
7. **Recherche des éléments propres de Ψ**
   Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:
   $$y' + \frac{\mu}{x} y = 0$$
   (a) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Déterminer alors les couples $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$ tels que $\Psi(f) = \lambda f$.

⧫ Problème : Autour des homothéties et du lemme de Schur

Dans tout ce problème, on fixe un corps $\mathbb{K}$ égal $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$. On notera $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ l'anneau des endomorphismes de E et $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Définition 1.

*Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est appelé **homothétie** si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_E$, i.e*

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \lambda x \,.$$

*Le scalaire λ est alors appelé **rapport** de l'homothétie u. On notera $\Lambda(E)$ l'ensemble des homothéties sur E.*

La partie I contient des résultats généraux dont il pourra être fait usage par la suite. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

– I –

1. (a) Démontrer que l'ensemble $\Lambda(E)$ est un s–e.v de $\mathscr{L}(E)$.
   (b) Établir que $\Lambda(E)$ est un sous–anneau de $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$. Est–il commutatif ?
2. On fixe dans cette question une homothétie $u \in \Lambda(E)$.
   (a) Vérifier que le rapport de u est unique.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le rapport de u pour que $u \in GL(E)$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée. Démontrer que $f \in \Lambda(E)$.

– II –

On fixe dans toute cette partie un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et on s'intéresse à l'ensemble suivant :

$$\mathscr{A}_\lambda = \{u \in \mathscr{L}(E) \,|\, u \circ u = \lambda u\} \,.$$

1. Vérifier que $\mathscr{A}_\lambda$ est non vide.
2. Déterminer $\mathscr{A}_\lambda \cap GL(E)$. On pourra distinguer des cas selon la valeur de λ.
3. Soit $u \in \mathscr{A}_\lambda$.
   (a) Pour $x \in \mathrm{Im}(u)$, déterminer $u(x)$.
   (b) On suppose $\lambda \neq 0$. Démontrer que :
   $$E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \,.$$
   (c) Ce résultat reste–t–il vrai si $\lambda = 0$?
4. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$ et on se donne $u, v \in \mathscr{A}_\lambda$.
   (a) Démontrer que :
   $$(u \circ v + v \circ u = 0) \iff (u \circ v = v \circ u = 0) \,.$$
   (b) En déduire que :
   $$(u + v \in \mathscr{A}_\lambda) \iff (u \circ v = v \circ u = 0) \,.$$
   (c) Démontrer que si $u + v \in \mathscr{A}_\lambda$ alors :
   $$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \quad \text{et} \quad \ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v) \,.$$
   (d) Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors il existe un scalaire $\mu \in \mathbb{K}$ (que l'on déterminera) tel que $u + v \in \mathscr{A}_\mu$ et que :
   $$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \quad \text{et} \quad \ker(u \circ v) = \ker(u) + \ker(v) \,.$$

– III –

On s'intéresse dans cette partie aux sous–ensembles **irréductibles** de $\mathscr{L}(E)$, au sens de la définition suivante.

Définition 2.

Soit $\mathscr{U} \subset \mathscr{L}(E)$. Alors :

- *un s–e.v F de E sera dit $\mathscr{U}$–**stable** si :*

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad u(F) \subset F\,.$$

- *on dira que $\mathscr{U}$ est **irréductible** si les seuls s–e.v de E $\mathscr{U}$–stables sont $\{0\}$ et E.*

1. (a) Démontrer que $GL(E)$ est irréductible.

   (b) Établir que $\Lambda(E)$ est irréductible si et seulement si E est une droite.

2. Soit $\mathscr{U}$ une partie irréductible de $\mathscr{L}(E)$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ une application linéaire **non nulle** telle que :
$$\forall u \in \mathscr{U}, \, \exists\, v, w \in \mathscr{L}(E), \quad f \circ u = v \circ f \quad \text{ et } \quad u \circ f = f \circ w\,.$$
   Démontrer que f est un automorphisme.

*Ce résultat est connu sous le nom de **Lemme de Schur**. Nous proposons infra d'en démontrer deux applications.*

3. *Commutant d'une partie irréductible.* Soit $\mathscr{U}$ une partie irréductible de $\mathscr{L}(E)$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad f \circ u = u \circ f$$
   On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Démontrer que $f \in \Lambda(E)$.

4. *Représentations irréductibles d'un groupe abélien.* Soit G un groupe abélien. On suppose qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : G \to GL(E)$ tel que $\varphi(G)$ soit une partie irréductible de $\mathscr{L}(E)$ et que :
$$\forall s \in G, \, \exists, x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(s)(x) \in \mathrm{Vect}(x)\,.$$
   Démontrer que E est une droite.