Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

⧫ Exercice 1 : banque CCINP

Il s'agit du CCINP 1.

⧫ Exercice 2 : banque CCINP (bis !)

Il s'agit du CCINP 4.

⧫ Exercice 3 : racines imbriquées

1. Une récurrence immédiate démontre que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à termes positifs. De fait, pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$ et donc $u_n \to \infty$ par minoration.
2. (a) Démontrons tout d'abord par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq n$.
   - *$n = 1$:* trivial.
   - *Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 2$.* Alors :

     $$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \sqrt{2n+1} \leq \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$$

     par hypothèse de récurrence et croissance de la fonction racine carrée.

   De fait, si $n \geq 2$, on a

   $$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0$$

   et donc $u_n = o(n)$.

   (b) Au voisinage de l'infini, on a :

   $$u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} = \sqrt{n}\sqrt{1+o(1)} \sim \sqrt{n}\,.$$

   (c) Soit $n \geq 2$; alors

   $$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}\,.$$

   De plus $u_n + \sqrt{n} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$ d'après (b) *ergo*

   $$u_n - \sqrt{n} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}$$

   d'où $u_n - \sqrt{n} \to \dfrac{1}{2}$ ce qui entraîne que l'on a bien $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

⧫ Problème : adapté de CCINP MP 2018

– I –

1. (a) Les polynômes P et R étant de degré 2, ils ne peuvent être interpolateurs de sinus en 2 points par condition **(PI-1)**. Le polynôme Q vérifiant les deux conditions voulue, il est interpolateur de sinus en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
   (b) On vérifie que $P = eX + (1 - X)$ convient.
2. (a) Si P et Q sont deux polynômes interpolateurs de f aux points $x_0, \dots, x_n$ alors le polynôme $R = P - Q$ est de degré au plus n (par différence) et s'annule en $n + 1$ points distincts (les x_i). Par condition de degré, $R = 0$ et donc $P = Q$.
   (b) Non : si on retire cette condition alors le polynôme R de la question 1.(a) interpole également sinus en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
3. (a) Il suffit de poser $Q = \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$.
   (b) Le polynôme nul est l'unique polynôme interpolateur de Q aux points $x_0, \dots, x_n$.

– II –

Il s'agit de questions de cours.

– III –

1. *Question de cours.*
2. Soit $x \in \Lambda$; alors $f(x) - L_n(f)(x) = 0$ par condition **(PI-2)**. De plus, $\pi_\Lambda(x) = 0$ donc $c_x = \frac{a+b}{2}$ convient (par exemple).
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p fois dérivable qui s'annule $p + 1$ fois.
   (a) — $k = 0$. Trivial en remarquant que $\phi^{(0)} = 0$ par continuité.
   — *Supposons la propriété vraie au rang* $k \in [\![0, p - 1]\!]$. Alors par hypothèse de récurrence, $\phi^{(k)}$ s'annule en $\ell = p - k + 1$ points $z_1, \dots, z_\ell$. De fait, pour tout $j \in [\![0, \ell - 1]\!]$, $\phi^{(k)}$ est continue sur $[z_j, z_{j+1}]$, dérivable sur $]z_j, z_{j+1}[$ et vérifie $\phi^{(k)}(z_j) = 0 = \phi^{(k)}(z_{j+1})$; on a donc par théorème de Rolle l'existence d'un point $t_j \in]z_j, z_{j+1}[$ tel que $\phi^{k+1}(t_j) = 0$. *In fine*, la fonction $\phi^{(k+1)}$ s'annule en $\ell - 1 = p - k$ points distincts (à savoir $t_0, \dots, t_{\ell-1}$).
   (b) D'après la question (a) pour $k = p$, $\phi^{(p)}$ s'annule en un point $c \in [a, b]$. De plus, on a vu que c était strictement compris entre deux racines de $\phi^{(p-1)}$ appartenant à ce même segment. *In fine*, $c \in]a, b[$.
4. On fixe $x \in [a, b]$ tel que $x \notin \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) La fonction F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par combinaison linéaire. Soit $t \in [a, b]$; on a alors :
   $$F^{n(+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - \lambda \pi_\Lambda^{(n+1)}(t)\,.$$
   Le polynôme L_n étant de degré au plus n, on a $L_n^{(n+1)} = 0$. Ainsi, on obtient par récurrence immédiate (pour le calcul des dérivées de π_Λ) :
   $$F^{n(+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda (n + 1)!\,.$$
   (b) Le réel x étant fixé, on peut poser $\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\Lambda(x)}$, le dénominateur étant non nul car $x \notin \Lambda$.

(c) La fonction F s'annule en $x, x_0, \ldots, x_n$ qui sont deux à deux distincts car $x \notin \Lambda$. D'après la question 3.(b), comme la fonction F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et s'annule $n+2$ fois, il existe un point $c_x \in]a, b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$. Ceci entraîne d'après 4.(a) et 4.(b) que :

$$f^{(n+1)}(c_x) = \lambda(n+1)! = \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\Lambda(x)}(n+1)!$$

et donc on a bien :

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\Lambda(x) \ .$$

– IV –

1. Ces deux ensembles sont respectivement l'image du segment $[a, b]$ par les fonctions continues $f^{(n+1)}$ et $f - L_n(f)$. Par théorème des bornes atteintes, ils admettent tous deux un maximum.
2. Soit $x \in [a, b]$; alors

$$|\pi_\Lambda(x)| = \prod_{k=0}^{n} |x - x_k| \leq (b-a)^{n+1}$$

car t et les x_k sont des éléments de $[a, b]$ et donc

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f)(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\Lambda(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \right| (b-a)^{n+1} \\ & \frac{(b-a)^{n+1}]}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \ . \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'inégalité étant indépendant de x, on peut passer au maximum et obtenir :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}]}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \ .$$