

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

◆ Exercice 1 : banque CCINP

- On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

◆ Exercice 2 : banque CCINP (bis !)

- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
- Prouver que l'implication :

$$(f \text{ est dérivable en } x_0) \implies (f' \text{ admet une limite finie en } x_0)$$

est fausse. *Indication* : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

◆ Exercice 3 : racines imbriquées

On s'intéresse dans cet exercice à la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

i.e

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

- Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$.
- Établir que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(n)$.
 - Vérifier que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n}$.
 - Démontrer qu'il existe un réel α (que l'on déterminera) tel que :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{n} + \alpha + o(1).$$

◆ Problème : adapté de CCINP MP 2018

Commençons par fixer deux réels a, b tels que $a < b$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. On se donne ensuite $n + 1$ points x_0, \dots, x_n deux à deux distincts de $[a, b]$.

On appellera **polynôme interpolateur** de f aux points x_0, \dots, x_n tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

(PI-1) $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e $\deg(P) \leq n$) ;

(PI-2) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = f(x_i)$.

Il est interdit dans les parties I et II de faire usage de tout résultat de cours relatif aux polynômes de Lagrange. La partie II est à considérer comme une question de cours.

– I –

1. (a) Parmi les trois polynômes ci-ensuite, un seul est interpolateur de la fonction sinus en 0 et $\frac{\pi}{2}$. Lequel (justifier, évidemment) ?

$$P = X \left(X - \frac{\pi}{2} \right), \quad Q = \frac{2}{\pi} X, \quad R = \frac{4}{3\pi^2} X(2\pi - X).$$

- (b) Donner un polynôme interpolateur de la fonction exponentielle aux points 0 et 1.
2. (a) Démontrer que le polynôme interpolateur de f , lorsqu'il existe, est unique.
 (b) Cette unicité est-elle préservée si on supprime la condition **(PI-1)** ? Pourquoi ?
3. (a) Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(x_i) = 0$.
 (b) Que dire du polynôme interpolateur de Q aux points x_0, \dots, x_n ?

– II –

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle i -ième **polynôme de Lagrange associé à f et aux points x_0, \dots, x_n** le polynôme

$$L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose également

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i.$$

1. Vérifier que

$$\forall i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker associé à i et j .

2. Démontrer que $L_n(f)$ est le polynôme interpolateur de f aux points x_0, \dots, x_n .

– III –

On suppose dans cette partie que la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur le segment $[a, b]$. De plus, on pose $\Lambda = \{x_0, \dots, x_n\}$ et

$$\pi_\Lambda = \prod_{i=0}^n (X - x_i).$$

L'objectif de cette partie est de démontrer la propriété suivante, pour tout $x \in [a, b]$:

$$(\mathcal{P}_x) \quad \exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\Lambda(x).$$

1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$.
2. Justifier que (\mathcal{P}_x) est vraie pour tout $x \in \Lambda$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois.
 - (a) Démontrer par récurrence sur $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, la fonction $\phi^{(k)}$ s'annule au moins $p+1-k$ fois.
 - (b) En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$. Ensuite, relire la question pour se rendre compte que l'on a oublié de démontrer que c est bien compris dans l'intervalle $]a, b[$ avec les crochets **ouverts**. Corriger cette erreur.
4. **Fixons** désormais $x \in [a, b]$ tel que $x \notin \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit alors :

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\Lambda(t) \quad .$$

- (a) Démontrer que $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ et que

$$\forall t \in [a, b], \quad F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(n+1)!.$$

- (b) Déterminer un réel λ (dépendant de x) tel que $F(x) = 0$.
 (c) En déduire que la propriété (\mathcal{P}_x) est vraie.

– IV –

On conserve dans cette partie les hypothèses et notations du III.

1. Démontrer l'existence des deux quantités suivantes :

$$\|f^{(n+1)}\|_\infty = \max\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in [a, b]\}.$$

et

$$\|f - L_n(f)\|_\infty = \max\{|f(t) - L_n(f)(t)| \mid t \in [a, b]\}.$$

2. Démontrer, à l'aide du résultat de la partie III et de ce qui précède, que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$