Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

♦ Exercice 1 : banque CCINP

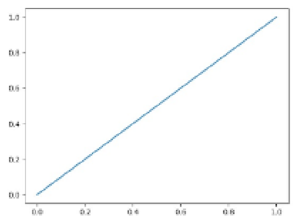
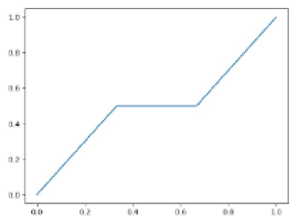
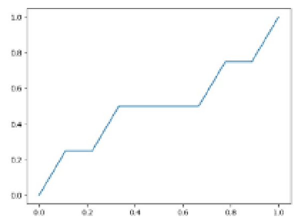
Il s'agit du CCINP 42.

♦ Exercice 2 : adapté de CCINP MP 2020

1. (a) On trouve les expressions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} \frac{9}{4}x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right[\\ \frac{9}{4}x - \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \frac{9}{4}x - 1 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right[\\ \frac{3}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[\\ \frac{9}{4}x - \frac{5}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{cases}.$$

   (b) Voici les allures demandées.

2. — $n = 0$: trivial.

   — *Supposons la propriété vraie à un rang* $n \geq 0$. Si $x \in [0,1]$ alors $f_{n+1}(x) \in \left\{\frac{f_n(3x)}{2}, \frac{1}{2}, \frac{f_n(3x-2)}{2} + \frac{1}{2}\right\}$.
   Par hypothèse de récurrence, chacune de ces valeurs est dans $[0,1]$, d'où le résultat.

3. — $n = 0$:

   — Si $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leq \frac{1}{6}.$$

— Si $x \in]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geq \frac{1}{2}$, on a donc

$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,.$$

D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

— Si $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, alors

$$|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| = \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$. Alors :

— Si $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}\,|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}\,.$$

— Si $x \in]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0\,.$$

— Si $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}\,|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}} \leq .$$

4. (a) Posons $\mathscr{E}_n = \{\, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \mid x \in [0,1]\}$; cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car contenant $0 = \left|f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) - f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right|$. Elle est de plus majorée par $\frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$ d'après la question 3., d'où l'existence de sa borne supérieure.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que la quantité $\frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$ majore l'ensemble $\mathscr{E}_n$ et donc, la borne supérieure étant le plus petit majorant, on a bien :

$$u_n \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\,.$$

   (c) Par théorème d'existence par encadrement, on a $u_n \to 0$.

5. (a) — *$n = 0$:* f_0 est l'identité ...

   — *Supposons la propriété vraie à un rang* $n \geq 0$. Alors f_{n+1} est continue sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, $\left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$ et $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

   donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$. Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$, et elle

est constante donc croissante sur $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut "recoller" cette croissance sur tout $[0,1]$ (par exemple si $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$ et $y \in \left[\frac{2}{3};1\right]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leq f_{n+1}(y)\Big)$.
Enfin, $f_{n+1}(0) = \dfrac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3\times 1 - 2)}{2} = 1$.

(b) Comme f_n est continue et que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ alors par TVI, $f_n([0,1]) = [0,1]$, d'où le résultat.

⧫ Exercice 3 : un peu de trigonométrie

1. Soit $n \geq 2$, alors :
$$|a_n| \leq \prod_{k=2}^{n} 1 = 1\,.$$

2. On remarque que, pour tout $n \geq 2$, $a_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) a_n$ et donc $a_{n+1} \leq a_n$. De fait, $(a_n)_n$ est bien décroissante.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $\cos(x)^2 - \cos(2x) = \sin(x)^2 \geq 0$.

   (b) Soit $n \geq 2$, alors :
$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{a_{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{a_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{a_n\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}{a_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}{\cos\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\
&\geq 1 \text{ par la question 3.(a),}
\end{aligned}$$
   d'où le résultat.

   (c) On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $b_{n+1} \geq b_n$: la suite $(b_n)_n$ est croissante.

4. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont respectivement croissantes et décroissantes. De plus, pour $n \geq 2$:
$$a_n - b_n = a_n\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$$
et donc $a_n - b_n \to 0$ comme produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0. Par adjacence, on obtient le résultat voulu.

5. (a) Soit $n \geq 2$; alors :
$$\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{a_{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{a_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{a_n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2a_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \quad \textit{via } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

   (b) D'après 5.(a), la suite $(c_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc, si $n \geq 2$, son terme général est donné par $c_n = c_2 \dfrac{1}{2^{n-2}}$, ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \frac{c_2}{2^{n-2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2^{n-2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\,. \end{aligned}$$

(c) Par taux d'accroissement, $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on déduit de la question précédente que $a_n \to \dfrac{2}{\pi}$ et donc, par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{2}{\pi}$.

⧫ Problème : adapté de CCP PSI 2003

– I –

1. Ceci est classique : il s'agit des fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
2. Ceci découle du théorème de Cauchy linéaire appliqué aux EDL d'ordre 2, qui s'applique ici car μ est continue.
3. (a) Les fonctions G_μ et H_μ sont dérivables (et même de classe $\mathscr{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Il en va de même pour F_μ par somme et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

   (b) On a, par calcul direct, que $F_\mu(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F_\mu'(x) = \cos(x)\int_0^x \mu(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x \mu(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

   et donc $F_\mu'(0) = 0$.
4. Il découle de l'expression obtenue en 3.(b) que F_μ^prime est de classe $\mathscr{C}^1$ et donc que F_μ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_\mu^{''(x)} = -\sin(x)G_\mu(x) + \mu(x)(\cos(x)^2 + \sin(x)^2) + \cos(x)H_\mu = -F_\mu(x) + \mu(x)\,.$$

5. F_μ est solution du même problème de Cauchy que φ_μ, donc par unicité de ladite solution, ces deux fonctions sont égales.

– II –

1. (a) Si on pose $f : x \mapsto G_\mu(x+2\pi) - G_\mu(x)$ et $g : x \mapsto H_\mu(x+2\pi) - H_\mu(x)$ alors on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 \times G'(x+2\pi) - G'(x) = \mu(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - \mu(x)\cos(x) = 0$$

   par périodicité de μ et cos. De même, on vérifie que g' est la fonction nulle.

   (b) Les fonctions f et g posées précédemment étant de dérivée nulle sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$, elles y sont constantes. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_\mu(x+2\pi) - G_\mu(x) = f(0) = G_\mu(2\pi) \quad \text{ et } \quad H_\mu(x+2\pi) - H_\mu(x) = g(0) = H_\mu(2\pi)\,.$$

2. (a) D'après la question I.5, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (en utilisant le résultat de la question 1.(b)) :

$$\varphi_\mu(x+2\pi) - \varphi_\mu(x) = F_\mu(x+2\pi) - F_\mu(x) = \sin(x)G_\mu(2\pi) - \cos(x)H_\mu(2\pi)\,.$$

(b) D'après la question précédente, φ_μ est 2π–périodique si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(x)G_\mu(2\pi) - \cos(x)H_\mu(2\pi) = 0\,.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient que $H_\mu(2\pi) = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ nous livre $G_\mu(2\pi) = 0$. Réciproquement, si ces deux conditions sont réalisées, on a bien la périodicité de φ_μ en utilisant l'expression trouvée à la question précédente.

– III –

1. (a) Avec $\mu = \sin$ on a $G_{\sin}(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2n} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = 0$ et $H_{\sin}(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \pi \neq 0$ donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas 2π-périodique.

(b) La aussi la fonction n'est pas périodique. En effet, $G_{\cos}(2\pi) = \pi \neq 0$ et donc la question II.2.(b) livre le résultat.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\varphi_{\sin}(2n\pi) = F_{\sin}(2n\pi) = -\cos(2n\pi) \times n\pi = -n\pi$$

donc $\varphi_{\sin}$ n'est pas bornée.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$G_{\cos}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = n\pi$$

d'où

$$\varphi_{\cos}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = F_{\cos}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = n\pi$$

donc $\varphi_{\cos}$ n'est pas bornée.

3. (a) On a :

$$G_\mu(2\pi) = \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t$$

et donc, via le changement de variable $t = \pi + u$ dans la deuxième intégrale cela donne $G_\mu(2\pi) = 0$. On obtient par le même procédé que $H_\mu(2\pi) = 0$, ce qui établit que φ est 2π-périodique d'après la question II.2.(b).

(b) φ étant de classe $\mathscr{C}^2$ et 2π-périodique, les applications φ, φ' et φ'' sont continues et 2π-périodiques donc bornées : en effet on a alors $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi([0, 2\pi])$ qui est donc un segment de $\mathbb{R}$ par théorème des bornes atteintes ; de même pour φ' et φ''.