

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

◆ Exercice 1 : banque CCINP

On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

◆ Exercice 2 : adapté de CCINP MP 2020

On note f_0 la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_0 : x \mapsto x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose ensuite :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases} .$$

1. (a) Donner une expression explicite des fonctions f_1 et f_2 . **Indication** : pour f_2 , on découpera l'ensemble $[0, 1]$ en sept sous-intervalles.
 (b) Représenter l'allure des courbes de f_0 , f_1 et f_2 **sur trois graphiques différents**.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est à valeurs dans $[0, 1]$.
3. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} .$$

Indication : on pourra différencier des cas selon la valeur de x .

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'existence de la quantité

$$u_n = \sup\{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \mid x \in [0, 1]\} .$$

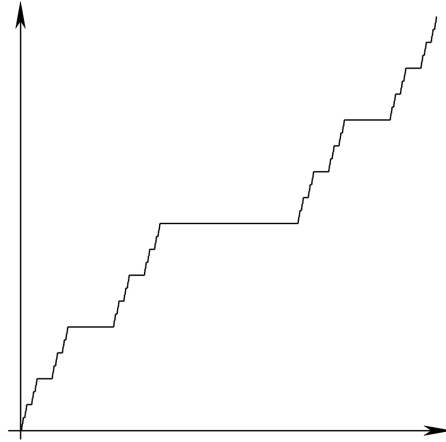
- (b) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}} .$$

- (c) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_n$?

5. (a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les fonctions f_n sont croissantes et continues sur le segment $[0, 1]$, et que $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède que f_n est une fonction surjective de $[0, 1]$ sur lui-même.

On peut démontrer que les fonctions f_n "convergent" (en un sens que vous étudierez en MP) vers une fonction parfois appelée "escalier du diable", croissante, continue et surjective sur $[0, 1]$.



◆ Exercice 3 : un peu de trigonométrie

L'objet de cet exercice est l'étude des deux suites définies ci-ensuite, pour $n \geq 2$:

$$a_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = a_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est bornée.
2. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
3. (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x)^2 - \cos(2x) \geq 0$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1.$$

(c) Que peut-on conclure quant à la suite $(b_n)_{n \geq 2}$?

4. Démontrer que les suites $(a_n)_{n \geq 2}$ et $(b_n)_{n \geq 2}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
5. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$c_n = a_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

(c) Déterminer la valeur de la limite ℓ évoquée à la question 4.

◆ Problème : adapté de CCP PSI 2003

Dans ce problème, on fixe une fonction $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue 2π -périodique et on considère l'équation différentielle

$$y'' + y = \mu \quad (1)$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \cos(t) dt \quad \text{et} \quad H_\mu(x) = \int_0^x \mu(t) \sin(t) dt .$$

Enfin, on désigne par F_μ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F_\mu : x \mapsto \sin(x)G_\mu(x) - \cos(x)H_\mu(x) .$$

– I –

- Déterminer les solutions **réelles** de l'équation homogène associée à l'équation (1).
- Justifier l'existence d'une fonction φ_μ solution de l'équation (1) telle que $\varphi_\mu(0) = \varphi'_\mu(0) = 0$.
- (a) Justifier la dérivabilité des fonctions G_μ , H_μ et F_μ .
(b) Calculer $F_\mu(0)$ et $F'_\mu(0)$.
- Démontrer que F_μ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et exprimer F''_μ en fonction de F_μ et μ .
- En déduire que $\varphi_\mu = F_\mu$.

– II –

- (a) Calculer la dérivée des fonctions $x \mapsto G_\mu(x + 2\pi) - G_\mu(x)$ et $x \mapsto H_\mu(x + 2\pi) - H_\mu(x)$.
(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$G_\mu(x + 2\pi) - G_\mu(x) = G_\mu(2\pi) \quad \text{et} \quad H_\mu(x + 2\pi) - H_\mu(x) = H_\mu(2\pi) .$$

- (a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_\mu(x + 2\pi) - \varphi_\mu(x)$ en fonction de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $G_\mu(x)$ et $H_\mu(x)$.
(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $G_\mu(2\pi)$ et $H_\mu(2\pi)$ pour que la fonction φ_μ soit 2π -périodique.

– III –

On se propose dans cette partie d'étudier quelques cas particuliers pour la fonction μ .

- La fonction φ_μ est-elle 2π -périodique...
(a) ...lorsque $\mu = \sin$?
(b) ...lorsque $\mu = \cos$?
- La fonction φ_μ est-elle bornée...
(a) ...lorsque $\mu = \sin$?
(b) ...lorsque $\mu = \cos$?
- On suppose dans cette question que $\mu : t \mapsto |\sin(t)|$.
(a) Montrer que la fonction φ_μ est 2π -périodique.
(b) Les fonctions φ_μ , φ'_μ et φ''_μ sont-elles bornées?