

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

◆ Exercice CCINP

Il s'agit du CCINP 55, question 2.

◆ Problème : théorème de Weierstrass, version faible

– I –

1. Il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions puissances.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ et $n \geq 1$.

(a) Soit $x \in [0, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} B_n(af + bg)(x) &= \sum_{k=0}^n (af + bg) \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n f \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + ba \sum_{k=0}^n g \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= aB_n(f)(x) + bB_n(g)(x). \end{aligned}$$

(b) Si $f \geq 0$ alors pour tout $x \in [0, 1]$, $B_n(f)(x) \geq 0$ par somme de termes positifs.

(c) Comme $f - g \geq 0$, on a $0 \leq B_n(f - g) = B_n(f) - B_n(g)$ d'après les questions précédentes, d'où le résultat.

(d) Soit $x \in [0, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f \binom{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=0}^n \left| f \binom{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ car } x \in [0, 1] \\ &= B_n(|f|)(x). \end{aligned}$$

3. On fixe $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ et $n \geq 1$.

(a) Il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions puissances, qui sont dérivables.

(b) Soit $x \in [0, 1]$; alors :

$$\begin{aligned} \frac{x(1-x)}{n} B_n(f)'(x) &= \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f \binom{k}{n} \frac{d}{dx} (x^k (1-x)^{n-k}) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f \binom{k}{n} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f \binom{k}{n} (kx^k(1-x)^{n+1-k} - (n-k)x^{k+1}(1-x)^{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f \binom{k}{n} \left(\frac{k}{n} (x^k(1-x)^{n+1-k} + x^{k+1}(1-x)^{n-k}) - (x^{k+1}(1-x)^{n-k}) \right). \end{aligned}$$

On remarque ensuite que :

$$x^k(1-x)^{n+1-k} + x^{k+1}(1-x)^{n-k} = x^k(1-x)^{n-k}(1-x+x) = x^k(1-x)^{n-k}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{x(1-x)}{n} B_n(f)'(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} - x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \\ &= B_n(g)(x) - x B_n(f)(x). \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $x \in [0, 1]$; alors :

$$B_n(\phi_0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1 = \phi_0(x).$$

(b) Soit $x \in [0, 1]$; alors, d'après la question 3.(b) on a :

$$\frac{x(1-x)}{n} B_n(\phi_0)'(x) = B_n(\phi_1)(x) - x B_n(\phi_0)(x)$$

soit :

$$0 = B_n(\phi_1)(x) - x$$

et donc $B_n(\phi_1) = \phi_1$.

(c) Soit $x \in [0, 1]$; alors, toujours via 3.(b) :

$$\frac{x(1-x)}{n} B_n(\phi_1)'(x) = B_n(\phi_2)(x) - x B_n(\phi_1)(x)$$

et donc

$$\frac{x(1-x)}{n} = B_n(\phi_2)(x) - x^2$$

d'où le résultat.

– II –

1. L'ensemble \mathcal{F} est une partie de \mathbb{R} , non vide ($|f(0)| \in \mathcal{F}$). De plus, comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y admet un maximum u et un minimum v par théorème des bornes atteintes. De fait, \mathcal{F} est majorée par $\max(|u|, |v|)$ et admet donc une borne supérieure.

2. Soient $x, y \in [0, 1]$.

— Si $|x - y| \leq \delta$ alors :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \leq K(x - y)^2 + \varepsilon.$$

— Sinon, fixons $z \in [x, x + \delta] \subset [x, y]$. Alors $|x - z| \leq \delta$ et donc :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon + 2M. \end{aligned}$$

Or, comme $|x - y| > \delta$, on a $\frac{(x - y)^2}{\delta^2} > 1$ et donc $2M \leq 2M \frac{(x - y)^2}{\delta^2}$. In fine on a bien :

$$|f(x) - f(y)| \leq K(x - y)^2 + \varepsilon$$

3. Fixons $y \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)\phi_0(x)| &= |f(x) - f(y)| \\ &\leq K(x-y)^2 + \varepsilon \quad \text{par 2.} \\ &= K(x^2 - 2yx + y^2) + \varepsilon \\ &= K(\phi_2(x) - 2y\phi_1(x) + y^2\phi_0(x)) + \varepsilon\phi_0(x). \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(y)B_n(\phi_0)(x)| &= |B_n(f - f(y)\phi_0)(x)| \quad \text{par I.2.(a)} \\ &\leq B_n(|f - f(y)\phi_0|)(x) \quad \text{par I.2.(d)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |f - f(y)\phi_0| \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(K(\phi_2 \left(\frac{k}{n}\right) - 2y\phi_1 \left(\frac{k}{n}\right) + y^2\phi_0 \left(\frac{k}{n}\right)) + \varepsilon\phi_0 \left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

par 4.(a), car $\frac{k}{n} \in [0, 1]$. En développant la somme, on obtient donc bien :

$$|B_n(f)(x) - f(y)B_n(\phi_0)(x)| \leq K(B_n(\phi_2)(x) - 2yB_n(\phi_1)(x) + y^2B_n(\phi_0)(x)) + \varepsilon B_n(\phi_0)(x).$$

(c) En évaluant le résultat de la question précédente en " $x = y$ " on obtient :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(y) - f(y)| &\leq K(B_n(\phi_2)(y) - 2yB_n(\phi_1)(y) + y^2B_n(\phi_0)(y)) + \varepsilon B_n(\phi_0)(y) \\ &= K \frac{y(1-y)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Une brève étude de fonction montrant que $y(1-y) \leq \frac{1}{4}$, on obtient le résultat souhaité.

4. Soit $x \in [0, 1]$; alors en appliquant le résultat de la question précédente à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on obtient par théorème d'existence par encadrement que $B_n(f)(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$. Les $B_n(f)$ étant des fonctions polynomiales, on a démontré le théorème de Weierstrass.