Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

♦ Exercice CCINP

Soit a un nombre complexe. On pose $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n \,.$$

Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

♦ Problème : théorème de Weierstrass, version faible

L'objet de ce devoir est la démonstration du théorème suivant, démontré en premier lieu par Karl Weierstrass en 1885. Nous nous inspirons ici d'une méthode constructive due à Sergeï Natanovich Bernstein [1] et datant de 1912.

Théorème 1 (Weierstrass *(version faible)*).

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \,.$$

☞ *On rappelle qu'une fonction polynomiale est une fonction de la forme*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_d x^d, \quad \text{avec } a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \,.$$

Ceci signifie que $B_n(f)$ est la **fonction** qui à $x \in [0,1]$ associe le **réel** $B_n(f)(x)$ défini ci–dessus. On pose également, pour $x \in [0,1]$ et $i \in \mathbb{N}$, $\phi_i(x) = x^i$.

✖ On manipule dans ce problème différents types d'objets : fonctions, suites, nombres réels. Il est donc **impératif** de soigner la rédaction et de prendre garde à quantifier et homogénéiser les expressions présentées. Tout manquement à cette règle sera ***lourdement*** sanctionné.

– I –

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et $n \geq 1$; justifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   (a) $B_n(af + bg) = aB_n(f) + bB_n(g)$;
   (b) $(f \geq 0) \Rightarrow (B_n(f) \geq 0)$;

1. À ne pas confondre avec *Felix* Bernstein, mathématicien allemand et contemporain de l'autre.

   (c) $(f \geq g) \Rightarrow (B_n(f) \geq B_n(g))$;
   (d) $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et soit $n \geq 1$.
   (a) Justifier que la fonction $B_n(f)$ est dérivable.
   (b) Démontrer que si l'on pose $g : x \mapsto xf(x)$ on a, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\frac{x(1-x)}{n} B_n(f)'(x) = B_n(g)(x) - xB_n(f)(x) \ .$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier que $B_n(\phi_0) = \phi_0$.
   (b) Établir que $B_n(\phi_1) = \phi_1$.
   (c) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$:
$$B_n(\phi_2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

– II –

On fixe dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ et un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On admettra qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in [0,1], \quad (|x-y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) \ .$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \{|f(x)| \,|\, x \in [0,1]\}$ admet un plus grand élément, que l'on notera M.
2. On pose $K = \dfrac{2M}{\delta^2}$. Démontrer que, pour tous $x, y \in [0,1]$, on a :
$$|f(x) - f(y)| \leq K(x-y)^2 + \varepsilon$$
3. Fixons $y \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$
$$|f(x) - f(y)\phi_0(x)| \leq K(\phi_2(x) - 2y\phi_1(x) + y^2\phi_0(x)) + \varepsilon\phi_0(x) \ .$$
   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$
$$|B_n(f)(x) - f(y)B_n(\phi_0)(x)| \leq K(B_n(\phi_2)(x) - 2yB_n(\phi_1)(x) + y^2B_n(\phi_0)(x)) + \varepsilon B_n(\phi_0)(x) \ .$$
   (c) Pour conclure, montrer que
$$|B_n(f)(y) - f(y)| \leq \frac{K}{4n} + \varepsilon \ .$$
4. Démontrer le théorème 1.