Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

⧫ Exercice : suprise !

Il s'agit du CCINP 84.

⧫ Problème 1 :Une récurrence non linéaire

– I –

1. (a) On trouve $u_0(2) = 2$, $u_1(2) = 4$ et $u_3(2) = 8$.
   (b) Une récurrence triviale établit que cette suite est nulle.
2. (a) Il s'agit d'une récurrence immédiate.
   (b) *Idem* ; penser à utiliser la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$.
3. L'ensemble $E = \{N \in \mathbb{N} \,|\, u_N(x) = 0\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide par hypothèse et donc admet un minimum M. Comme $u_M(x) = 0$, on démontre par une (nouvelle) récurrence immédiate que $u_n(x) = 0$ pour tout $n \geq M$. Problème : si $M > 0$ on a l'égalité
$$0 = u_M(x) = \frac{u_{M-1}^2}{M}$$
qui entraîne que $u_{M-1}(x) = 0$, contredisant la minimalité de M. De fait, on a bien $M = 0$ et donc $(u_n(x))_n$ est la suite nulle.
4. Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x)^2}{n+1}$, si $u_n(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ on a $\ell = \ell^2 \times 0 = 0$.

– II –

1. (a) Démontrons par récurrence sur $n \geq N$ que pour tout $n \geq N$ on a $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$.
   — *Initialisation :* vraie par hypothèse.
   — *Hérédité :* soit $n \geq N$ tel que $u_{n+1} \leq u_n$. On a alors :
$$u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)^2}{n+1} \leq u_n(x)$$
   et donc, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$:
$$\begin{aligned} u_{n+2}(x) &= \frac{u_{n+1}(x)^2}{n+2} \\ &\leq \frac{u_n(x)^2}{n+2} \\ &\leq \frac{u_n(x)^2}{n+1} = u_{n+1}(x)\,. \end{aligned}$$
   (b) D'après la question précédente, $(u_n(x))_n$ est décroissante à partir d'un certain rang. Comme $x \geq 0$, elle est de plus minorée par 0 (I.2.(a)) donc converge, et ce obligatoirement vers 0 (I.4), *ergo* $x \in X_0$.

(c) On vérifie que $u_0(1) = 1 \geq u_1(1) = \dfrac{1}{2}$, d'où le résultat avec $N = 0$ dans la question précédente.

2. (a) On procède par récurrence (et oui !). L'initialisation est donnée par l'énoncé, et si on se donne $n \geq N$ tel que $u_n(x) \geq n+2$ on a :

$$u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)^2}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1} = n+3+\frac{1}{n+1} \geq n+3\,.$$

(b) Par minoration, on a la divergence de la suite $(u_n(x))_n$ vers $+\infty$.

(c) On vérifie que $u_0(2) = 2 \geq 0+2$, d'où le résultat en appliquant la question précédente en $N = 0$.

3. Les deux ensembles X_0 et X_∞ sont non vides car ils contiennent respectivement 1 et 2, et d'intersection vide par unicité de la limite. De plus, si $x \notin X_0$ alors par négation de la question 1. on obtient que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_N(x) < u_{N+1}(x)$$

et donc la suite $(u_n(x))_n$ est strictement croissante. De fait, par théorème de la limite monotone, elle est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$; le premier cas étant impossible en vertu de la question I.4 qui impose que si $(u_n(x))_n$ converge, elle le fait nécessairement vers 0. On a donc bien $x \in X_\infty$ et donc $\mathbb{R}$ est partitionné par X_0 et X_∞.

4. (a) Soit $y \in [0,x]$; alors d'après les questions I.2.(a) et I.2(b) on a, pour tout $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n(y) \leq u_n(x) \to 0$$

et donc, par encadrement, on a bien $u_n(y) \to 0$ *ergo* $y \in X_0$.

(b) Soit $y \in [x,+\infty[$; alors d'après la question I.2(b) on a, pour tout $n \geq 0$:

$$\underbrace{u_n(x)}_{\to\infty} \leq un(y)$$

et donc, par minoration, on a bien $u_n(y) \to \infty$ *ergo* $y \in X_\infty$.

5. (a) X_0 est une partie non vide (elle contient 1) de $\mathbb{R}$. De plus, comme $2 \in X_\infty$ alors $\forall x \geq 2$, $x \in X_\infty = \mathbb{R} \setminus X_0$ et donc 2 majore X_0. Ainsi, la borne supérieure de X_0 existe dans $\mathbb{R}$.

(b) Si $x \in [0,\delta[$ alors x ne majore pas X_0 et donc il existe $y \in X_0$ tel que $x < y$ et donc $x \in [0,y] \subset X_0$.

(c) Soit $x > \delta$; alors $x \notin X_0$ et donc $x \in X_\infty = \mathbb{R} \setminus X_0$.

⧫ Problème 2 : un peu d'analyse complexe

– I –

1. (a) Il s'agit de déterminer les solutions éventuelles de l'équation $f(z) = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$. Cette équation équivaut à $z^2 - iz + 1 = 0$ qui est une équation du second degré dont le discriminant est égal à $-5 = (i\sqrt{5})^2$. Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\dfrac{i(1-\sqrt{5})}{2}$ qui sont donc également les antécédents de i par f. Comme i admet deux antécédents par f, elle n'est pas injective.

(b) Soit $Z \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à l'équation $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Celle-ci équivaut à $z^2 - zZ + 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont 0 n'est pas solution. Cette dernière équation admet donc toujours au moins une solution non nulle donc Z admet au moins un antécédent par f. L'application f est donc surjective.

2. (a) Puisque $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\right\}$,

$$f(\mathbb{U}) = \left\{f\left(e^{i\theta}\right) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} + e^{-i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\right\} = \{2\cos\theta \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Puisque $\mathrm{Im}(\cos) = [-1,1]$, on a bien $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\
&\iff f(z) = \overline{f(z)} \\
&\iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\
&\iff z - \bar{z} - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \\
&\iff (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \\
&\iff \bar{z} = z \text{ ou } |z| = 1 \\
&\iff z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } z \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

3. On étudie pour cela l'application $\varphi = f_{|\mathbb{R}^*}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de φ			-2		‖ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$			$-\infty$ ‖			2		

Les variations de φ montrent que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Mais la continuité de φ montre via le théorème des valeurs intermédiaires que φ prend toutes les valeurs dans $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Il en résulte que $f\left(\mathbb{R}^*\right) = \mathrm{Im}(\varphi) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$.

4. (a) Soit $Z \in f(D)$. Il existe donc $z \in D$ tel que $Z = f(z)$. Il s'agit maintenant de montrer que $f(z) \notin [-2,2]$. On peut raisonner par l'absurde : supposons que $f(z) \in [-2,2]$; on a donc $f(z) \in \mathbb{R}$ *i.e* $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$. D'après la question 2.(b) $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{U}$. Or on ne peut avoir $z \in \mathbb{U}$ puisque $z \in D$ d'où $z \in \mathbb{R}$. Mais alors $f(z) \in f(\mathbb{R}) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ et $f(z) \in [-2,2]$ donc $f(z) = -2$ ou $f(z) = 2$. Les variations de φ nous disent alors que $z = -1$ ou $z = 1$, ce qui est à nouveau impossible puisque $z \in D$. On en conclut par l'absurde que $f(z) \notin [-2,2]$. Ainsi on a bien $f(D) \subset \mathbb{C} \backslash [-2,2]$.

(b) Soit $Z \in \mathbb{C}\backslash[-2,2]$. On rappelle que les antécédents de Z par f sont les solutions de l'équation $z^2 - \mathrm{Zz} + 1 = 0$. Cette équation du second degré admet pour discriminant $Z^2 - 4$ qui est non nul puisque $Z \notin \{-2,2\}$. Elle admet donc deux solutions. Ainsi Z admet exactement deux antécédents par f dans $\mathbb{C}^*$. Notons α et β les deux antécédents de Z par f. Puisqu'ils sont solutions de l'équation $z^2 - \mathrm{Zz} + 1 = 0$, $\alpha\beta = 1$ par relations coefficients–racines.

(c) 0n reprend les notations de la question précédente. Il s'agit maintenant de voir qu'un seul des deux antécédents de Z par f appartient à D . Puisque $\alpha\beta = 1$, on a également $|\alpha||\beta| = 1$. On ne peut avoir $|\alpha| = 1$ ou $|\beta| = 1$ puisqu'alors $Z = f(\alpha) = f(\beta)$ appartiendrait à $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$. Ainsi α et β sont de module distincts de 1 . Puisque $|\alpha||\beta| = 1$, l'un de ces deux modules est strictement inférieur à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1 . Un seul de ces deux complexes appartient donc à D (ils sont évidemment tous deux de module non nul puisqu'ils appartiennent à $\mathbb{C}^*$). Ainsi Z admet un unique antécédent dans D par f. Ceci prouve que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C}\backslash[-2,2]$.

– II –

1. On a déjà vu que les antécédents de i par f étaient $\dfrac{i(1+\sqrt{5})}{2}$ et $\dfrac{i(1-\sqrt{5})}{2}$. Les antécédents de i par g sont donc les antécédents de ces deux nombres par la fonction exponentielle. Les formes exponentielles de ces deux nombres sont
$$\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{2}}\qquad \frac{i(1-\sqrt{5})}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}$$
On en déduit que leurs antécédents par l'exponentielle sont les complexes
$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\text{ et }\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$
où $k\in\mathbb{Z}$. Il s'agit donc également des antécédents de i par g.
2. On a :
$$g(i\mathbb{R})=\{g(i\theta)\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}=\{2\cos\theta\,|\,\theta\in\mathbb{R}\}=[-2,2]\,.$$
On sait que $\exp(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $g(\mathbb{R})=f\left(\mathbb{R}_+^*\right)$. Les variations de la fonction φ étudiées à la question I.3 montrent donc que $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=[2,+\infty[$.

– III –

On définit une suite d'applications $(\varphi_n)_n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant
$$\forall z\in\mathbb{C},\varphi_0(z)=2\quad\text{ et }\quad\varphi_1(z)=z$$
et par la relation de récurrence
$$\forall n\in\mathbb{N},\,\forall z\in\mathbb{C},\quad \varphi_{n+2}(z)=z\varphi_{n+1}(z)-\varphi_n(z)\,.$$

1. (a) Pour tout $z\in C$,
$$\begin{aligned}\varphi_2(z)&=z\varphi_1(z)-\varphi_0(z)=z^2-2\\ \varphi_3(z)&=z\varphi_2(z)-\varphi_1(z)=z^3-3z\\ \varphi_4(z)&=z\varphi_3(z)-\varphi_2(z)=z^4-4z^2+2\end{aligned}$$
(b) Les solutions de l'équation $\varphi_2(z)=0$ sont clairement $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
De même, les solutions de l'équation $\varphi_3(z)=0$ sont $0,-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. L'équation $\varphi_4(z)=0$ est une équation bicarrée. On la résout classiquement en effectuant le changement de variable $Z=z^2$. Les solutions de l'équation $Z^2-4Z+2=0$ sont $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$. On en déduit que les solutions de l'équation $\varphi_4(z)=0$ sont
$$\sqrt{2+\sqrt{2}},\ -\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \text{ et }\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$
2. Pour $n\geq 0$, on note P_n l'assertion
$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad \varphi_n(f(z))=f\left(z^n\right)$$
Puisque pour tout $z\in\mathbb{C}^*,\varphi_0(z)=2$ et $f\left(z^0\right)=f(1)=2,\mathrm{P}_0$ est vraie. De même, pour tout $z\in\mathbb{C}^*,\varphi_1(f(z))=z+\dfrac{1}{z}$ et $f\left(z^1\right)=z+\dfrac{1}{z}$ donc P_1 est vraie. Supposons P_n et P_{n+1} vraies pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$,
$$\begin{aligned}\varphi_{n+2}(f(z))&=f(z)\varphi_{n+1}(f(z))-\varphi_n(f(z))\\ &=f(z)f\left(z^{n+1}\right)-f\left(z^n\right)\\ &=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\\ &=z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=f\left(z^{n+2}\right)\end{aligned}$$
Ainsi P_{n+2} est vraie. Par récurrence double, P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. (a) L'équation $f(z^n) = 0$ équivaut à $z^{2n} = -1$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, soit :

$$\mathrm{A}_n = \left\{ e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} \mid k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}.$$

(b) Remarquons que pour $\omega \in \mathrm{A}_n$,

$$\varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$$

Donc les $f(\omega)$ pour $\omega \in \mathrm{A}_n$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Via une formule d'Euler, ceci signifie que les réels $2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ sont des solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Réciproquement, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $\varphi_n(z) = 0$. Puisque f est surjective, il existe donc $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha = f(\omega)$. Alors $f(\omega^n) = \varphi_n(f(\omega)) = f(\omega^n) = 0$ de sorte que ω est solution de l'équation $f(z^n) = 0$. Il existe donc $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ tel que $\alpha = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$. Mais alors $\alpha = f(\omega) = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. Finalement l'ensemble des solutions de l'équations $\varphi_n(z) = 0$ est

$$\mathrm{B}_n = \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}$$

On peut remarquer que certains éléments de B_n figurent en double dans la description précédente. En effet,

$$\mathrm{B}_n = \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \cup \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![n, 2n-1]\!] \right\}$$

On montre alors que les deux ensembles de cette union sont égaux.

$$\begin{aligned}
\left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![n, 2n-1]\!] \right\} &= \left\{ 2\cos\left(\frac{(2(k+n)+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\
&\quad \text{via le "changement d'indice" } k \to k+n \\
&= \left\{ 2\cos\left(\pi + \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\
&= \left\{ -2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\
&= \left\{ -2\cos\left(\frac{(2(n-1-k)+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\
&= \left\{ -2\cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \\
&= \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}
\end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que

$$\mathrm{B}_n = \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$ puisqu'elle y est strictement décroissante. Les réels $2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont donc deux à deux distincts. Le nombre de solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ est donc n.