Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

◆ Exercice : suprise !

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

◆ Problème 1 :Une récurrence non linéaire

Dans tout ce problème nous noterons, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $(u_n(x))_n$ la suite réelle vérifiant :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \geq 0, \quad u_{n+1}(x) = \dfrac{u_n(x)^2}{n+1} \end{cases} .$$

– I –

1. (a) Calculer les 3 premiers termes de la suite $(u_n(2))_n$.
   (b) Que dire de la suite $(u_n(0))_n$?
2. (a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n(x) \geq 0 .$$
   (b) De même, démontrer que si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $x < y$ alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n(x) < u_n(y) .$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N(x) = 0$ alors $(u_n(x))_n$ est la suite nulle.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $(u_n(x))_n$ est convergente alors sa limite est nulle.

– II –

On s'intéresse dans cette partie aux deux ensembles suivants :

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}$$

et

$$X_\infty = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\} .$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N+1}(x) \leq u_N(x)$.
   (a) Démontrer que $(u_n(x))_n$ est décroissante à partir du rang N.
   (b) En déduire que $x \in X_0$.

   (c) Vérifier que $1 \in X_0$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$; on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N(x) \geq N+2$. Démontrer qu'alors on a :
$$\forall n \geq N,\ u_n(x) \geq n+2\,.$$
   (b) Qu'en déduire sur la nature de la suite $(u_n(x))_n$?
   (c) Vérifier que $2 \in X_\infty$.
3. Démontrer que (X_0, X_∞) est une partition de $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Soit $x \in X_0$; démontrer à l'aide d'un résultat de la partie I que $[0,x] \subset X_0$.
   (b) De la même façon, montrer que si $x \in X_\infty$ alors $[x,+\infty[\subset X_\infty$.
5. (a) Démontrer que $\delta = \sup(X_0)$ est bien défini.
   (b) Vérifier que $[0,\delta[\subset X_0$.
   (c) Montrer que $]\delta,+\infty[\subset X_\infty$.

⧫ Problème 2 : un peu d'analyse complexe

– I –

On définit une application f de la manière suivante :
$$f:\ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z + \frac{1}{z}\,.$$

1. (a) Déterminer les antécédents de i par f. L'application f est–elle injective ?
   (b) Démontrer que f est surjective.
2. (a) Établir que $f(\mathbb{U}) = [-2,2]$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.
3. Démontrer que $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. *Indication : on pourra admettre que la restriction de f à $\mathbb{R}^*$ est une fonction continue.*
4. On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.
   (a) Démontrer que $f(D) \subset \mathbb{C}\backslash[-2,2]$.
   (b) Établir que tout élément de $\mathbb{C}\backslash[-2,2]$ admet exactement 2 antécédents par f dans $\mathbb{C}^*$. Que vaut le produit de ces deux antécédents ?
   (c) Montrer que f induit une bijection de D sur $\mathbb{C}\backslash[-2,2]$.

– II –

On définit une application g de la manière suivante :
$$g:\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f\left(e^z\right)\,.$$

1. Quels sont les antécédents de i par g ?
2. Déterminer les ensembles $g(i\mathbb{R})$ et $g(\mathbb{R})$.

– III –

On définit une suite d'applications $(\varphi_n)_n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_0(z) = 2 \quad \text{et} \quad \varphi_1(z) = z$$

et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)\,.$$

1. (a) Donner des expressions de $\varphi_2(z), \varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.
   (b) En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0$, $\varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \varphi_n(f(z)) = f\left(z^n\right)\,.$$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f\left(z^n\right) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
   (b) En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.