

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

◆ Exercice 1 : diantre, qu'est-ce que cela ?

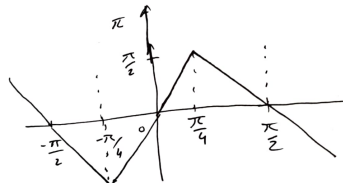
Il s'agit du CCINP 89.

◆ Exercice 2 : un peu de trigonométrie

1. (a) On vérifie aisément que f est π -périodique et impaire.
- (b) — Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $f(x) = 2x$;
 — si $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Comme de plus $f(x) = \arcsin\left(\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$ par périodicité, on a :

$$f(x) = -\arcsin\left(\sin\left(\underbrace{2x - \pi}_{\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)\right) = \pi - 2x.$$

- (c) D'après les symétries évoquées en (a), on obtient l'allure *infra*.



2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors comme $(1 - x)^2 \geq 0$, on a que $\frac{2x}{1 + x^2} \in [-1, 1]$. De fait, g est définie sur \mathbb{R} et est impaire (calcul trivial).
- (b) La fonction g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{2x}{1 + x^2} \in]-1, 1[$, condition qui est équivalente à $x \neq \pm 1$. De fait, g est dérivable sur $E =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{1 + x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)\sqrt{(1 - x^2)^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{1 + x^2} & \text{si } |x| < 1 ; \\ -\frac{2}{1 + x^2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) Par primitive, il existe donc deux constantes A et B réelles telles que :

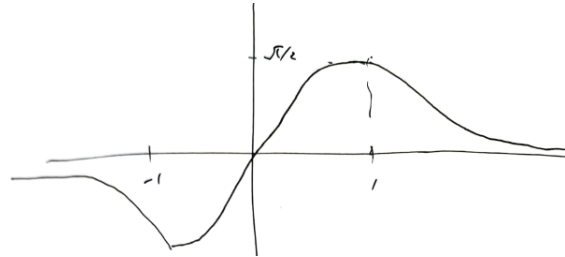
$$g(x) = \begin{cases} 2 \arctan(x) + A & \text{si } x \in]-1, 1[; \\ -2 \arctan(x) + B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme g est continue, ces deux expressions doivent avoir la même limite en (par exemple) $x \rightarrow 1$, ce qui entraîne que :

$$g(1) = \frac{\pi}{2} + A = -\frac{\pi}{2} + B$$

et donc, comme $g(1) = \frac{\pi}{2}$ on obtient $A = 0$ et $B = \pi$.

La courbe représentative de g a donc l'allure *infra*.



◆ Exercice 3 : une homographie sur \mathbb{U}

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$, on pose

$$f(z) = \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}.$$

1. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|\bar{\alpha}z| = |\bar{\alpha}| \neq 1$. On ne peut donc avoir $\bar{\alpha}z = -1$ sinon on aurait $|\bar{\alpha}z| = |-1| = 1$. Ceci prouve que $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ et donc que f est définie sur \mathbb{U} .
2. On peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |f(z)| = 1 &\iff |z + \alpha| = |\bar{\alpha}z + 1| \\ &\iff |z + \alpha|^2 = |\bar{\alpha}z + 1|^2 \\ &\iff (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}z + 1)(\alpha\bar{z} + 1) \\ &\iff |z|^2 + |\alpha|^2 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = |\alpha|^2|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 1 \\ &\iff (1 - |\alpha|^2)|z|^2 = 1 - |\alpha|^2 \\ &\iff |z| = 1 \quad \text{car } 1 - |\alpha|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $z \in \mathbb{U} \iff f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Tout d'abord, d'après la question précédente, $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
Soit $Z \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} Z = f(z) &\iff Z = \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1} \\ &\iff Z(\bar{\alpha}z + 1) = z + \alpha \\ &\iff z(Z\bar{\alpha} - 1) = \alpha - Z \end{aligned}$$

Puisque $Z \in \mathbb{U}$, on prouve comme à la première question que $Z\bar{\alpha} - 1 \neq 0$. L'équation $f(z) = Z$ d'inconnue z admet une unique solution. De plus, si z est solution de cette équation, $f(z) = Z \in \mathbb{U}$ et d'après la question précédente $z \in \mathbb{U}$. Ceci prouve que g est une bijection de \mathbb{U} dans \mathbb{U} .

◆ Problème : argument sinus hyperbolique

– I –

Traité en cours et TD.

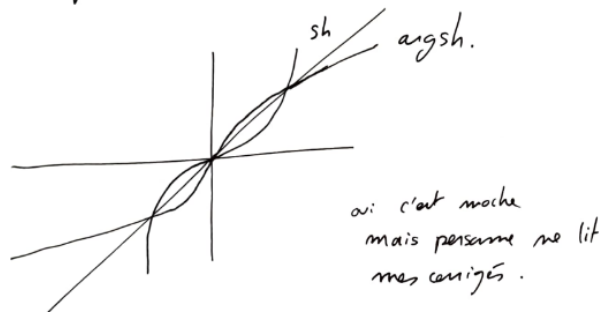
– II –

1. La fonction sh est continue et strictement monotone. De plus, $\text{sh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ et donc, par théorème de la bijection, on obtient le résultat souhaité.
2. D'après le théorème de la bijection, argsh est de la même monotonie que sh , donc strictement croissante. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, en posant $y = \text{argsh}(x)$ on a :

$$\text{argsh}(-x) = \text{argsh}(-\text{sh}(y)) = -\text{argsh}(\text{sh}(y)) = -y = -\text{argsh}(x)$$

d'où l'imparité.

3. (a) Par réciprocity, $\text{argsh}(0) = 0$ et $\text{argsh}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.
- (b) Ça doit ressembler vaguement à cela.



4. On applique le théorème de dérivation de la réciproque, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))}.$$

Or

$$\text{ch}(\text{argsh}(x))^2 = 1 + \text{sh}(\text{argsh}(x))^2 = 1 + x^2$$

et comme $\text{ch}(x) \geq 0$ on a *in fine* :

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. (a) Soit $x, t \in \mathbb{R}$ tels que $\text{sh}(t) = x$, i.e $2x = e^t - e^{-t}$. En posant $X = e^t$, l'équation étudiée est alors équivalente à :

$$X - \frac{1}{X} = 2x$$

i.e

$$X^2 - 2xX - 1 = 0.$$

Ce trinôme admet comme unique solution positive $X = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ce qui nous donne finalement $t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; alors

$$\text{argsh}(x) = \text{argsh}(\text{sh}(t)) = t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

– III –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; en posant $t = \operatorname{argsh}(x)$ on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) &= \operatorname{argsh}(2\operatorname{sh}(t)\sqrt{1+\operatorname{sh}(t)^2}) \\ &= \operatorname{argsh}(2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)) \\ &= \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(2t)) \\ &= 2t \\ &= 2\operatorname{argsh}(x)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Posons $f : x \mapsto \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$, définie et dérivable sur \mathbb{R} comme composée de fonctions usuelles. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{d}{dx}(2\operatorname{argsh}(x)).$$

De fait, par primitive, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\operatorname{argsh}(x) + A.$$

Enfin, en évaluant en $x = 0$, on trouve que A doit être nulle.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) &= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1+4x^2(1+x^2)}\right) \\ &= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(1+2x^2)^2}\right) \\ &= \ln\left(2x\sqrt{x^2+1} + 1+2x^2\right) \\ &= \ln\left(\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2\right) \\ &= 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= 2\operatorname{argsh}(x).\end{aligned}$$