

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 3 pages.

### ◆ Exercice 1 : diantre, qu'est-ce que cela ?

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

1. On suppose  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Déterminer le module et un argument du complexe  $z^k - 1$ .
2. On pose  $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$ . Montrer que  $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ .

### ◆ Exercice 2 : un peu de trigonométrie

1. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \arcsin(\sin(2x)).$$

- (a) Étudier la périodicité et la parité éventuelles de  $f$ .
  - (b) Simplifier l'expression de  $f(x)$  pour  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  puis  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
2. On s'intéresse dans cette question à la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_g$  de  $g$  ainsi que l'éventuelle parité de cette fonction.
- (b) Vérifier que  $g$  est dérivable sur sous-ensemble de  $\mathcal{D}_g$  que l'on précisera, et calculer  $g'$ .
- (c) En déduire une expression simplifiée de  $g$  sur  $\mathcal{D}_g$  et tracer l'allure de sa courbe.

### ◆ Exercice 3 : une homographie sur $\mathbb{U}$

Soit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ , on pose

$$f(z) = \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}.$$

1. Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{U}$ .
2. Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\bar{\alpha}z + 1 \neq 0$ . Montrer que  $z \in \mathbb{U}$  si et seulement si  $f(z) \in \mathbb{U}$ .
3. Démontrer que  $g = f|_{\mathbb{U}}$  est une bijection de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{U}$ .

## ◆ Problème : argument sinus hyperbolique

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction sinus hyperbolique et de sa réciproque, la fonction **argument sinus hyperbolique**.

– I –

### Définition 1.

On rappelle que la fonction **sinus hyperbolique** est définie par :

$$\operatorname{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

✖ **ATTENTION** : les questions 1 à 4 et 7 sont des questions de cours : il convient donc de les traiter avec attention et en détails.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction sh. Est-elle dérivable ?
2. Étudier la parité de la fonction sh.
3. La fonction sh est-elle périodique ?
4. (a) Faire l'étude des variations de la fonction sh, en incluant d'éventuelles valeurs remarquables ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.  
(b) Dessiner l'allure de la courbe de la fonction sh.
5. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2},$$

où l'on rappelle que :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

6. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Démontrer que :

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y).$$

7. Déterminer, pour  $x \in \mathbb{R}$ , la valeur de la quantité  $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2$ .

– II –

1. Démontrer que la fonction sh admet une fonction réciproque, que l'on notera :

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. Vérifier que la fonction argsh est impaire et strictement monotone (on précisera sa monotonie).
3. (a) Faire l'étude des variations de la fonction argsh, en incluant d'éventuelles valeurs remarquables ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.  
**Attention : on demande de procéder ici sans passer par le calcul de la fonction dérivée éventuelle de argsh.**  
(b) Dessiner sur un même graphique l'allure des courbes des fonctions sh et argsh.
4. Démontrer que la fonction argsh est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

5. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$  ; résoudre l'équation

$$\operatorname{sh}(t) = x, \quad (1)$$

d'inconnue  $t \in \mathbb{R}$ .

- (b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right).$$

– III –

On se propose dans cette partie de démontrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh} \left( 2x\sqrt{1 + x^2} \right) = 2\operatorname{argsh}(x) \quad (2)$$

de trois façons différentes.

1. Démontrer l'égalité (2) à l'aide du changement de variable  $t = \operatorname{argsh}(x)$ .
2. Établir l'égalité (2) en étudiant la dérivée de ses membres.
3. Pour finir, montrer l'égalité (2) à l'aide de la question II.5.(b).