Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

♦ Exercice 1 : une paire de sommes doubles

1. Pour $n \geq 1$, on a :
$$\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2\,.$$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) En échangeant les indices i et j,
$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{i+j}$$
   et donc $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n$.

   (b) Puisque $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n = n^2$, on a $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n = \dfrac{n^2}{2}$.

♦ Exercice 2 : une suite de fonctions

On définit la fonction $f_n : t \in [0,n] \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) *Cf.* cours.

   (b) Soit $t \in [0,n]$. Alors $\dfrac{t}{n} \in]-1,+\infty[$ et d'après la question précédente,
$$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$$
   donc
$$n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq t\,.$$
   Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient :
$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t\,.$$
   Si $t = n$, la seconde inégalité de l'énoncé est triviale. Sinon, $-\dfrac{t}{n} \in]-1,+\infty[$ et, par question (a) :
$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$$
   et donc, par croissance :
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\,.$$

   (c) D'après la question précédente,
$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t\,.$$

En multipliant par le réel positif $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ on obtient :

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

On multiplie ensuite par $-e^{-t}$:

$$-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq -e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

et donc

$$e^{-t}-f_n(t) \leq e^{-t}-e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n = e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right).$$

2. (a) On fixe $u \in [0,1]$ et on raisonne par récurrence sur n. Tout d'abord $(1-u)^0 = 1 \geq 1 = 1-0\cdot u$. Supposons que $(1-u)^n \geq 1-nu$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, en multipliant par le réel positif $1-u$:

$$(1-u)^{n+1} \geq (1-nu)(1-u) = 1-(n+1)u+nu^2 \geq 1-(n+1)u\,.$$

Par récurrence, $(1-u)^n \geq 1-nu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $t \in [0,n]$. Alors $\frac{t^2}{n^2} \in [0,1]$ donc, en appliquant la question précédente :

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1-n\frac{t^2}{n^2} = 1-\frac{t^2}{n}$$

puis

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}\,.$$

D'après la question 1.(c), on a donc :

$$0 \leq e^{-t}-f_n(t) \leq \frac{t^2e^{-t}}{n}\,.$$

3. (a) D'après la question précédente, g_n est minorée par 0 . Or $g_n(0)=0$ donc le minimum de f_n sur $[0,n]$ est $m_n = 0$ (atteint en 0).

(b) La fonction ψ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+$et pour tout $t \in \mathbb{R}_+, \psi'(t) = t(2-t)e^{-t}$. On en déduit que ψ est croissante sur $[0,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty[$: ψ admet donc un maximum sur $\mathbb{R}_+$en 2 . En particulier, elle est majorée sur $\mathbb{R}_+$ (par $\psi(2) = 4e^{-1}$).

(c) Notons t_n le point de $[0,n]$ où g_n admet son maximum. D'après la question 2.(b) :

$$0 \leq g_n\left(t_n\right) \leq \frac{\psi\left(t_n\right)}{n}$$

et donc

$$0 \leq \mathrm{M}_n \leq \frac{4}{ne}$$

D'après le théorème de convergence par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$.

♦ Problème : norme infinie d'une fonction bornée

– I –

1. Si f est majorée par $M \in \mathbb{R}$ et minorée par $m \in \mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \max(|m|, |M|)$ donc $f \in \mathscr{B}$.
   Réciproquement, si $|f|$ est majorée par un réel positif M, f est minorée par $-M$ et majorée par M.
2. $\mathrm{Abs}(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (I est non vide donc contient un élément x ; de fait $|f(x)| \in \mathrm{Abs}(f)$). De plus, comme $f \in \mathscr{B}$, il existe un $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq M$. M majore alors $\mathrm{Abs}(f)$ qui admet donc une borne supérieure.

– II –

1. Si f est nulle alors $\mathrm{Abs}(f) = \{0\}$ donc $\|f\|_\infty = 0$.
   Réciproquement, si $\|f\|_\infty = 0$ alors pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq 0$ (la borne supérieure est un majorant) donc $f = 0$.
2. Pour tout $x \in I$, on a :
   $$|f(x)| \leq |g(x)| \leq \|g\|_\infty$$
   donc $\|g\|_\infty$ majore $\mathrm{Abs}(f)$. La borne supérieure d'un ensemble étant son plus petit majorant, on a que $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.
3. (a) Soit $x \in I$; alors
   $$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| \; \|f\|_\infty$$
   car la borne supérieure d'un ensemble en est un majorant.

   (b) D'après la question (a), $|\lambda| \; \|f\|_\infty$ majore $\mathrm{Abs}(\lambda f)$. La borne supérieure d'un ensemble étant son plus petit majorant, on a donc que $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \; \|f\|_\infty$.

   (c) Si $\lambda = 0$, le résultat est trivial. Dans le cas contraire, on applique la question précédente à $g = \lambda f$ et $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$, obtenant :
   $$\|\mu g\|_\infty \leq |\mu| \; \|g\|_\infty$$
   soit :
   $$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \; \|\lambda f\|_\infty \, .$$
   En combinant avec le résultat la question (b), on a bien :
   $$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \; \|f\|_\infty \, .$$
4. (a) On a, par inégalité triangulaire et caractère majorant de la borne supérieure :
   $$\forall x \in I, \; |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$

   (b) D'après la question (a), $\|f\|_\infty \|g\|_\infty$ majore $\mathrm{Abs}(f+g)$. La borne supérieure d'un ensemble étant son plus petit majorant, on a donc que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

– III –

Dans les trois cas, on établit un tableau de variation de la valeur absolue de la fonction étudiée pour déterminer rapidement la norme infinie. On trouve :

1. $\|f\|_\infty = \ln(2)$ (approchée en 0) ;
2. $\|g\|_\infty = \dfrac{\pi}{2}$ (approchée en 0) ;
3. Si $n = 0$, $\|h\|_\infty = 1$ (atteint en 0). Sinon, la fonction est négative et admet un minimum en $\dfrac{n-1}{n}$; on a donc :
   $$\|h\|_\infty = \left| f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right| = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \, .$$