Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

♦ Exercice 1 : une paire de sommes doubles

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{i+j}\,.$$

1. Calculer $\mathrm{S}_n + \mathrm{T}_n$.
2. (a) Vérifier que $\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n$.
   (b) En déduire la valeur de S_n et T_n.

♦ Exercice 2 : une suite de fonctions

On définit la fonction $f_n : t \in [0,n] \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que
$$\forall u \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+u) \leq u$$
   (b) En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\,.$$
   (c) En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right)\,.$$
2. (a) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$,
$$(1-u)^n \geq 1 - nu\,.$$
   (b) En déduire que pour tout $t \in [0,n]$,
$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}\,.$$
3. Soit $n \geq 1$; on pose, pour $t \in [0,n]$, $g_n(t) = e^{-t} - f_n(t)$.
   (a) Déterminer le minimum m_n de g_n sur $[0,n]$.
   (b) Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto t^2 e^{-t}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) On admet que g_n admet un maximum M_n sur $[0,n]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = 0$.

♦ Problème : norme infinie d'une fonction bornée

L'objet de ce problème est l'étude des propriétés élémentaires de la *norme infinie* d'une fonction bornée. Dans toute la suite, on fixe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et on pose :

$$\mathscr{B} = \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M\} .$$

– I –

1. Démontrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathscr{B}$ si et seulement si elle est majorée et minorée.
2. Soit $f \in \mathscr{B}$; montrer que l'ensemble suivant admet une borne supérieure :

$$\mathrm{Abs}(f) = \{|f(x)| \;|x \in I\} .$$

Dans toute la suite, si $f \in \mathscr{B}$, on notera $\|f\|_\infty = \sup \mathrm{Abs}(f)$. Ce nombre est appelé *norme infinie* de la fonction f.

– II –

On fixe dans cette partie $f, g \in \mathscr{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(\|f\|_\infty = 0) \Leftrightarrow$ (f est la fonction nulle).
2. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $x \in I$ alors

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty .$$

3. (a) Montrer que

$$\forall x \in I, \; |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \; \|f\|_\infty .$$

   (b) En déduire que $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \; \|f\|_\infty$.

   (c) À l'aide de ce qui a été fait précédemment, établir que :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \; \|f\|_\infty$$

4. (a) Montrer que

$$\forall x \in I, \; |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

   (b) En déduire que

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

– III –

À l'aide d'une étude de leurs variations, déterminer la norme infinie des fonctions suivantes définies sur $I =]0, 1]$:

1. $f : x \mapsto \ln\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$;
2. $g : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ ***Indication :*** *on rappelle que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *et que* $\arctan(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \dfrac{\pi}{2}$;
3. $h : x \mapsto x^n(x-1)$, avec $n \in \mathbb{N}$.