

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

◆ Exercice 1 : un calcul de somme

1. (a) Cf. cours.
- (b) Cf. cours.
- (c) On remarque que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k-1)k(k+1) &= \sum_{k=0}^n k^3 - \sum_{k=0}^n k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n - 2) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} \end{aligned}$$

et donc, par changement d'indice,

$$N = \sum_{k=1}^{999} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=2}^{1000} (k-1)k(k+1) = 250499749500.$$

2. (a) Récurrence immédiate.
- (b) On remarque que $N = N_{1000}$.

◆ Exercice 2 : un autre calcul de somme

1. On obtient :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 5 & a_4 = 14 \\ S_0 = 1 & S_1 = 2 & S_2 = 5 & S_3 = 14 & S_4 = 42. \end{array}$$

On conjecture que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. (a) Par changement d'indice $k \leftarrow n - k$ on obtient le résultat.
- (b) On a :

$$2 T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n (k+n-k) a_k a_{n-k} = n S_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!^2} = 2(2n+1)a_n.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (k+2) a_{k+1} a_{n-k}. \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)a_{k+1} = 2(2k+1)a_k$ ergo :

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= a_{n+1} + 2 \sum_{k=0}^n (2k+1)a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4 T_n + 2 S_n \end{aligned}$$

Or $2 T_n = n S_n$ donc :

$$S_{n+1} + T_{n+1} = a_{n+1} + 2n S_n + 2 S_n = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

et comme $2 T_{n+1} = (n+1)S_{n+1}$ on a :

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} + \frac{n+1}{2} S_{n+1} = \frac{n+3}{2} S_{n+1}.$$

On en déduit que

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

- (b) D'après la question 1, $S_0 = a_1 = 1$. Supposons maintenant que $S_n = a_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$. Or on a supposé que $S_n = a_{n+1}$ donc :

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}.$$

De plus, $(n+3)a_{n+2} = 2(2n+3)a_{n+1}$ donc

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = \frac{n+3}{2} a_{n+2}$$

puis $S_{n+1} = a_{n+2}$ puisque $\frac{n+3}{2} \neq 0$. On a donc bien $S_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On sait que $a_0 = 1$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que a_0, a_1, \dots, a_n soient des entiers naturels. Alors S_n est également un entier naturel en tant que somme de produits de ces derniers entiers naturels. Puisque $a_{n+1} = S_n$, a_{n+1} est également un entier naturel. Par récurrence forte, a_n est donc un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◆ Exercice 3 : damiers de Fibonacci

- On trouve $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.
- Pour placer $n+1$ pièces, on a deux choix pour la position de la première : à l'horizontale, auquel cas la deuxième pièce sera placée obligatoirement en dessous et il restera n à poser, où alors à la verticale en en plaçant ensuite $n+1$. Le résultat en découle par disjonction de cas.
- (a) On trouve $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
(b) Il s'agit d'une récurrence double déjà traitée en cours.
- Comme $|\bar{\phi}| < 1$, on vérifie que $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.