Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

⧫ Exercice 1 : un calcul de somme

L'objectif de cet exercice est de calculer l'entier

$$N = \sum_{k=1}^{999} k(k+1)(k+2)$$

de deux façons différentes. ***On ne demande pas ici une valeur approchée, mais une expression "simple" de N sous forme de fraction rationnelle, sans simplification déraisonnable.***

1. On fixe $n \geq 2$.
   (a) Déterminer (en le démontrant) la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.
   (b) Démontrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
   (c) En déduire la valeur de N. ***Indication :*** *on pourra s'intéresser à la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 - k$.*
2. On pose, pour tout $n \geq 2$:
   $$N_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) .$$
   (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$N_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$
   (b) En déduire la valeur de N.

⧫ Exercice 2 : un autre calcul de somme

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k a_{n-k} .$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et S_0, S_1, S_2, S_3. Quelle conjecture est–on tenté de faire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :
   $$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k} .$$
   (b) En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Établir que :
   $$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n .$$
   (b) En déduire que $S_n = a_{n+1}$. On pourra raisonner par récurrence.
5. Démontrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

♦ Exercice 3 : damiers de Fibonacci

On considère un damier de taille $2 \times n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on souhaite recouvrir par des pièces de taille 1×2 placées horizontalement ou verticalement. On note a_n le nombre de tels recouvrement possibles.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3. On pourra faire un dessin.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
3. On note ϕ et $\overline{\phi}$ les racines, classées par ordre décroissant, de l'équation $x^2 = x + 1$.
   (a) Déterminer ϕ et $\overline{\phi}$.
   (b) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \overline{\phi}^{n+1}) .$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose
   $$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - a_n .$$
   Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.