

## - I -

1. La négation demandée est :

$$\exists x \in \mathbb{R}, (x \in E) \wedge (-x \notin E)$$

2. Les ensembles  $] - 2, 2]$  et  $\mathbb{R}_+$  ne sont pas symétriques, les autres le sont.

3. (a) Soit  $x \in E \cup F$ ; alors  $x \in E$  ou  $x \in F$  et donc par symétrie,  $-x \in E$  ou  $-x \in F$ , i.e  $-x \in E \cup F$ .

(b) Même réponse en substituant "et" à "ou".

## - II -

1. (a)

$$\exists x, y \in E, \exists \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \notin E.$$

(b) Le point  $0 = \frac{1}{2} \times (-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1$  n'est pas dans l'ensemble, d'où le résultat.

2. (a) Seul l'ensemble  $\{-1, 0, 1\}$  n'est pas un intervalle (il ne contient pas  $1/2$ ).

(b) Oui, il s'agit de l'intervalle  $[a, a]$ .

(3) (a)  $[a, b]$  est vide.

(b) On procède par double inclusion, en posant  $E = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

—  $E \subset [a, b]$  car pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in [a, b]$  (étudier la fonction  $f : t \mapsto ta + (1 - t)b$  qui est croissante sur  $[0, 1]$  et vérifie  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ ).

— Pour l'inclusion réciproque, on remarque que si  $x \in [a, b]$  alors  $\lambda = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$  et on vérifie que  $x = a + (1 - \lambda)b$  par le calcul.

(c) D'après la question précédente, la définition d'intervalle est équivalente au faire de contenir tous les segments  $x, y$  pour  $x, y \in I$ .

4. La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle : considérer  $\mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$  qui ne contient pas le segment  $[-1, 1]$ .

L'intersection de deux intervalles sera toujours un intervalle : en effet, si  $I$  et  $J$  sont deux intervalles et que  $x, y \in I \cap J$  alors le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $I$  et dans  $J$  et donc dans  $I \cap J$ .

5. Non, considérer  $I = \{0\}$ .

## - III -

1.

$$\forall m, M \in \mathbb{R}, \exists x \in E, (m > x) \vee (x > M)$$

2. (a)  $[a, b]$  vérifie cette propriété avec  $m = a$  et  $M = b$ .

(b)  $\mathbb{R}_+$  ne vérifie pas cette propriété car pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , il existe  $x \in \mathbb{R}_+$  tel que  $x > M$  (poser  $x = M + 1$ ).

3. Si  $x \in E$ , alors  $m \leq x \leq M$  par application directe de la propriété, d'où le résultat.