Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'usage de calculatrice ou de tout document (hors du présent sujet) est interdit.

Ce sujet comporte 2 pages.

Le but de ce problème est l'étude des propriétés de certains sous–ensembles de $\mathbb{R}$. **La clarté de l'expression sera un critère majeur d'évaluation des copies.**

– I –

Définition 1.

*Un ensemble E inclus dans $\mathbb{R}$ est dit **symétrique** si il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in E) \Rightarrow (-x \in E)\ .$$

1. Donner la négation de la phrase quantifiée suivante, pour $E \subset \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in E) \Rightarrow (-x \in E)\ .$$

2. Les ensembles suivants sont–ils symétriques (justifier) : $\{-1, 1\}$, $[-2, 2]$, $]-2, 2]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$?
3. (a) Démontrer que si E, F sont deux ensembles symétriques de $\mathbb{R}$, alors $E \cup F$ est symétrique.
   (b) Même question avec $E \cap F$.

– II –

Définition 2.

*On appelle **intervalle** tout sens–ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in E\ .$$

1. (a) Écrire la négation de la propriété définissant un intervalle.
   (b) En déduire que l'ensemble $\{-1, 1\}$ n'est pas un intervalle.
2. (a) Les ensembles $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$ et $\{-1, 0, 1\}$ sont–ils des intervalles ?
   (b) L'ensemble $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ est–il un intervalle ?
3. On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (a \leq x) \wedge (x \leq b)\}\ .$$

   (a) Que se passe–t–il si $a > b$?
   (b) Démontrer que :

$$[a, b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \,|\, \lambda \in [0, 1]\}\ .$$

   (c) En déduire que si I est inclus dans $\mathbb{R}$ alors :

$$I \text{ est un intervalle} \iff \forall x, y \in I,\ [x, y] \subset I\ .$$

4. La réunion de deux intervalles est–elle un intervalle ? Même question avec l'intersection.
5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; l'ensemble $\mathbb{R} \setminus I$ est–il un intervalle ?

– III –

Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ si :

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ (m \leq x) \wedge (x \leq M)\ .$$

1. Écrire la négation de la propriété $(\mathscr{P})$.
2. (a) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.
   (b) Donner un exemple d'intervalle ne vérifiant pas la propriété $(\mathscr{P})$.
3. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ pour deux réels m et M donnés alors $E \subset [m, M]$.