*Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.*

Extraits de concours : espaces préhilbertiens réels

# ♦ Exercice 1 : E3A PSI 2020

1. On a, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la première, puis à la deuxième variable :
$$\Phi(X,Y) = x_1y_1\Phi(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2\Phi(\vec{i},\vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j},\vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j},\vec{j}).$$
Grâce aux données de l'énoncé, on obtient donc :
$$\Phi(X,Y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cos(\theta) + x_2y_2.$$

2. Au vu de la formule explicite obtenue dans la première question, le fait que ce soit une forme bilinéaire est évident, notamment du fait de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour la symétrie, on note que le produit étant commutatif dans $\mathbb{R}$, si $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ alors :
$$\Phi(Y,X) = y_1x_1 + (y_1x_2 + y_2x_1)\cos(\theta) + y_2x_2 = \Phi(X,Y).$$
Il reste à vérifier que $\Phi$ est définie et positive. Or, si $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, alors :
$$\begin{aligned}\Phi(X,X) = x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2 - \cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + \left(1 - \cos(\theta)^2\right)x_2^2\end{aligned}$$
On a $1 - \cos(\theta)^2 \geqslant 0$ (mieux : par hypothèse $\theta \in ]0,\pi[$, donc $1 - \cos(\theta)^2 > 0$ ), donc la somme ci-dessus ne contient que des termes positifs. On en déduit d'une part : $\Phi(X,X) \geqslant 0$. D'autre part, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :
$$\Phi(X,X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \cos(\theta)x_2 = 0 \\ \underbrace{\left(1 - \cos(\theta)^2\right)}_{>0}x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$
donc $\Phi(X,X) = 0$ si et seulement si $X$ est le vecteur nul : ceci achève de démontrer que $\Phi$ est définie positive. En tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, $\Phi$ est un produit scalaire sur $E$.

3. Comme $f$ est linéaire, pour montrer que $f$ est une isométrie il suffit de démontrer qu'elle préserve la norme euclidienne associée au produit scalaire $\Phi$. C'est-à-dire :
$$\forall X \in E, \quad \Phi(f(X), f(X)) = \Phi(X,X).$$
On nous donne la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j})$, ce qui nous permet d'en déduire : $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j}$, et donc, pour tout $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, on a :
$$f(X) = x_1f(\vec{i}) + x_2f(\vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\vec{j}.$$
Grâce à l'explicitation de $\Phi$ donnée dans la première question (ou plutôt grâce à (*) si l'on s'intéresse à $\Phi(X,X)$ et $\Phi(f(X), f(X))$ ), on en déduit :
$$\begin{aligned}\Phi(f(X), f(X)) &= (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\theta) - 4x_2^2\cos(\theta)^2 + x_1^2 + 4x_1x_2\cos(\theta) + 4\cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X,X),\end{aligned}$$
ce qu'il fallait démontrer.

4. Appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Notons que $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc $\vec{i}$ est déjà unitaire pour ce produit scalaire. Posons :

$$\vec{u} = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i}, \quad \text{et} \ : \quad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vec{u}, \vec{u})}}\vec{u}.$$

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure alors que la famille $(\vec{i}, \vec{k})$ est orthonormée, et qu'on a $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$. Explicitons $\vec{k}$ ; on a : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\theta)$, et donc :

$$\vec{u} = \vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}.$$

Or :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) \overset{(*)}{=} (-\cos(\theta))^2 - 2\cos(\theta)\cos(\theta) + 1^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2,$$

donc finalement :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)^2}}(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}) = \frac{1}{\sin(\theta)}(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}).$$

5. $f(\vec{i}) = \vec{j}$ d'après la donnée de la matrice $C$, et du fait que $\vec{k} = \dfrac{1}{\sin(\theta)}(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i})$ on en déduit : $\vec{j} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$. Par conséquent $f(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$, ce qui signifie que la première colonne de $\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Après calcul par changement de base, on obtient :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

6. On vérifie par le calcul que $f^m = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $m\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $m\theta = 2k\pi$. On en déduit :

$$f^m = \mathrm{Id}_E \iff \theta \in \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{2k\pi}{m} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

## ♦ Exercice 2 : E3A PC 2021

1. *Cf.* cours.
2. Soit $P \in E$.

$$(P \mid P_0) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) P_0(a_j) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) \ .$$

3. (a) Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Alors $L_j(a_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$ car $i \neq j$.

   En fait, pour tout $i \neq j$, $X - a_i$ est en facteur dans $L_j$. Ensuite, pour $i = j$, $L_j(a_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$.

   (b) Soit $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. D'après la question précédente,

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) = L_i(a_i) L_j(a_i) + L_i(a_j) L_j(a_j) = 0.$$

   Donc la famille $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale.

   (c) Comme $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, elle est libre. Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n + 1 = \dim(E)$, c'est une base de $E$.
   De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$(L_i \mid L_i) = \sum^{n} L_i(a_k)^2 = L_i(a_i)^2 = 1$$

   d'où le résultat.

(d) Soit $P \in E$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de $E$, les composantes de $P$ sont données par :

$$(P \mid L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_i(a_k) = P(a_i) \ .$$

Ainsi, $\quad P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

(e) On remarque que $P_0 = \sum_{j=0}^{n} L_j$ car pour tout $i \in [\![0, n]\!], P_0(a_i) = 1$.

4. (a) L'application $\varphi : P \in E \mapsto (P_0 \mid P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)$ est linéaire car le produit scalaire est bilinéaire.
Donc $\quad H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

(b) D'après le cours, on a $H = \mathrm{Vect}(P_0)^{\perp}$, donc $\quad H^{\perp} = \mathrm{Vect}(P_0)$
Comme $\dim\left(H^{\perp}\right) = 1$, on a $\dim(H) = \dim(E) - 1 = n$.

5. (a) D'après le cours, on sait bien projeter orthogonalement sur un sous-espace lorsque l'on a une base orthonormale de ce sous-espace. Comme $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$, le vecteur $R = \dfrac{P_0}{\|P_0\|} = \dfrac{P_0}{\sqrt{n+1}}$ est une base orthonormée de $H^{\perp}$. Ainsi, le projeté orthogonal de $Q$ sur $H^{\perp}$ est donné par

$$(Q \mid R)R = \frac{1}{n+1}(Q \mid P_0) P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$$

soit

$$p_{H^{\perp}}(Q) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \ .$$

(b) La distance de $Q$ au sous-espace vectoriel $H$ est égale à la norme du projeté orthogonal de $Q$ sur $H^{\perp}$ :

$$\mathrm{d}(Q, H) = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) P_0 \right\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \right| \ .$$