

Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. L'objectif de ce devoir étant de s'entraîner à la résolution de problèmes, il serait inconséquent, inutile et dispendieux de recopier une réponse non comprise.

Ce sujet comporte 2 pages.

EXTRAITS DE CONCOURS : ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

◆ Exercice 1 : E3A PSI 2020

Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé. On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base \mathcal{B} :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans \mathbb{R} , linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$ et $Y = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ deux vecteurs de E . Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ .
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E .
3. Prouver que pour tout vecteur $\vec{u} \in E$, on a $\Phi(f(\vec{u}), f(\vec{u})) = \Phi(\vec{u}, \vec{u})$.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que (\vec{i}, \vec{k}) soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{k}) .
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

◆ Exercice 2 : E3A PC 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E . Soit $(a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille de réels distincts deux à deux. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose :

$$(P | Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j) Q(a_j).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Soit P un polynôme de E , calculer $(P | P_0)$.
3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$

- (a) Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- (b) Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.
- (c) En déduire que \mathcal{B} est une base de E et qu'elle est orthonormale.
- (d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base \mathcal{B} .
- (e) Déterminer $\sum_{j=0}^n L_j$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^n P(a_j) = 0$.
- (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .
- (b) Déterminer H^\perp et en déduire la dimension de H .
5. Soit Q un polynôme de E .
- (a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur H^\perp .
- (b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H .