

Le présent corrigé n'est pas à considérer comme une copie modèle mais comme un collection d'éléments de correction, donnés pour vous aider à identifier vos erreurs. Dans le doute, interroger l'enseignant est toujours pertinent.

EXTRAITS DE CONCOURS : E3A

◆ Exercice 1 (MP 2021)

1. Il s'agit d'une famille de degrés échelonnés dont le cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t)) dt = \lambda \int_0^1 P(t) dt + \mu \int_0^1 Q(t) dt = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

Donc φ est linéaire et comme de plus $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ alors φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- (b) Comme $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} alors $\text{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Or $1 = \varphi(1) \in \text{Im}(\varphi)$ donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. D'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = n + 1 - \dim(\mathbb{R})$$

donc $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n$.

3. (a) (a) Soient $(P, R) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda P + \mu R)(x) = \int_0^x (\lambda P(t) + \mu R(t)) dt = \lambda \int_0^x P(t) dt + \mu \int_0^x R(t) dt = \lambda \psi(P)(x) + \mu \psi(R)(x)$$

Donc $\psi(\lambda P + \mu R) = \lambda \psi(P) + \mu \psi(R)$ donc ψ est linéaire.

- (b) On a

$$\psi(\mathbb{R}_n[X]) = \psi(\text{Vect}(1, X, \dots, X^n)) = \text{Vect}(\psi(1), \psi(X), \dots, \psi(X^n)) = \text{Vect}\left(X, \frac{X^2}{2}, \dots, \frac{X^{n+1}}{n+1}\right)$$

donc $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

- (c) Notons que

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0 \Leftrightarrow \psi(P)(1) = 0 \Leftrightarrow (X-1) \mid \psi(P).$$

Or, d'après la question précédente

$$Q \in \text{Im}(\psi) \Leftrightarrow X \mid Q$$

et $\deg(Q) \leq n+1$, donc

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow X(X-1) \mid \psi(P)$$

et

$$\deg(\psi(P)) \leq n+1 \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \psi(P) = RX(X-1).$$

On en déduit que

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \exists (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \psi(P) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j \right) X(X-1) = \sum_{k=1}^n b_{k-1} X^k (X-1)$$

et donc

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1)).$$

- (d) Comme $\psi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$, en dérivant on obtient $(\psi(P))'(x) = P(x)$. De fait, si $\psi(P) \in \text{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$ alors

$$\exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \psi(P) = \sum_{k=1}^n c_k X^k (X-1)$$

et donc

$$\psi(P)' = \sum_{k=1}^n c_k ((k+1)X^k - kX^{k-1})$$

ce qui implique que

$$P = \sum_{k=1}^n c_k ((k+1)X^k - kX^{k-1}).$$

Donc, d'après la question précédente,

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow P \in \text{Vect}(2X-1, 3X^2-2X, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$$

ergo

$$\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Vect}(2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1}), .$$

Notons $\mathcal{C} = (2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$. D'après la question 2.(b),

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n = \text{Card}(\mathcal{C}) \geq \dim(\text{Vect}(\mathcal{C}))$$

donc

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(\mathcal{C}) = \text{Vect}(2X-1, \dots, (n+1)X^n - nX^{n-1}).$$

4. (a) $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \dim(\mathbb{R}) = n+1$.
 (b) Tout d'abord on constate que les ψ_k sont dans \mathcal{H} . Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k \psi_k = 0$. Si $j < k$, $(X^j)^{(k)} = 0$ et si $j \geq k$, on a

$$(X^j)^{(k)} = \frac{j!}{(j-k)!} X^{j-k}$$

donc $\psi_k(X^j) = 0$ si $j \neq k$ et $\psi_k(X^k) = 1$. Soit ensuite $P = \sum_{j=0}^n \lambda_j X^j$; notons que

$$\psi_k(P) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \psi_k(X^j) = \lambda_k \text{ et donc}$$

$$0 = \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \psi_k \right) (P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \psi_k(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2$$

Comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls alors $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi (ψ_0, \dots, ψ_n) est une famille libre de \mathcal{H} .

Et comme, d'après la question précédente, $\text{Card}(\psi_0, \dots, \psi_n) = n+1 = \dim(\mathcal{H})$ alors (ψ_0, \dots, ψ_n) est une base de \mathcal{H} .

- (c) D'après la question précédente, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $\psi_k(P) = a_k$ alors

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\psi_k(P)}{k+1}$$

$$\text{Donc } \varphi = \sum_{k=0}^n \frac{\psi_k}{k+1}.$$

◆ Exercice 2 (MP 2020)

0. (a) On a

$$\sigma_1 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{c}{a}.$$

(b) Posons $\Delta = a^2 + 4b$.

— Si $\Delta = 0$, on a une unique racine double r et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = (A + nB)r^n.$$

— Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines réelles de l'équation caractéristique, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

— Si $\Delta < 0$, on retrouve les solutions réelles à l'aide de l'expression des solutions complexes. En l'occurrence, si $z = re^{i\theta}$ (avec $r = |z|$) et \bar{z} sont les racines complexes (conjuguées) de l'équation caractéristique, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = Ar^n \cos(n\theta) + Br^n \sin(n\theta).$$

1. La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par \mathbb{Z} telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de \mathcal{C} .

2. \mathcal{C} est une partie non vide de E (contient la suite précédente). - Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y' . On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n} + \beta x'_{-n}$. Comme les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme les suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi $y \in \mathcal{C}$. Et donc \mathcal{C} est stable par combinaison linéaire. Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, \mathcal{C} est un sous-espace de E .

3. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq A$. De même, la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{-n}| \leq B$. On pose alors $C = \max(A, B)$, et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq C$: la suite x est bornée. Ainsi toute suite dans \mathcal{C} est bornée.

4. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$. Soit $y = T(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Ainsi :

—

$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De même $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Ainsi $y \in \mathcal{C}$. On en déduit que T est une application de \mathcal{C} vers \mathcal{C} . Montrons la linéarité. Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = T(x), y' = T(x'), z = \alpha x + \beta x'$, et $w = T(z)$ et $v = \alpha y + \beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x')$ i.e. $v = w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v . On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$v_n = \alpha y_n + \beta y'_n = \alpha (x_{n-1} + x_{n+1}) + \beta (x'_{n-1} + x'_{n+1}) = (\alpha x_{n-1} + \beta x'_{n-1}) + (\alpha x_{n+1} + \beta x'_{n+1}).$$

Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1} + z_{n+1} = w_n$. Donc $v = w$. Ainsi T est bien une application linéaire de \mathcal{C} vers \mathcal{C} i.e. T est un endomorphisme de \mathcal{C} .

5. On a clairement $S \circ S = \operatorname{id}_E = \operatorname{id}_{\mathcal{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de \mathcal{C} , on en déduit que S est une symétrie de \mathcal{C} et donc son axe, $\ker(S - \operatorname{id}_{\mathcal{C}})$, et sa direction, $\ker(S + \operatorname{id}_{\mathcal{C}})$, sont supplémentaires dans \mathcal{C} . Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathcal{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathcal{C}; S(x) = x\} = \ker(S - \operatorname{id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \ker(S + \operatorname{id}_{\mathcal{C}})$, donc F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans \mathcal{C} .

6. En reprenant ce qui a été fait dans la question précédente, on a : S est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

7. (a) Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$. Soit $x \in \ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{E}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n-1} + x_{n+1} = \lambda x_n$. En particulier : considère donc l'équation caractéristique \mathcal{C} de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2 - Si $\Delta > 0$. Alors les racines de \mathcal{C} sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1. D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A, B, C, D tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar^n + \frac{B}{r^n}$ et $x'_n = Cr^n + \frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc $A = 0 = C$. De plus $x_0 = x'_0$ donc $B = D$. Enfin $x'_1 + x_1 = \lambda x_0$ donc $(\lambda - 2r)B = 0$. Or les racines de \mathcal{C} sont $\frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{E}})^2 \subset \{0_{\mathcal{E}}\}$ S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{E}}) = \{0_{\mathcal{E}}\}$ - Si $\Delta < 0$. Alors les racines de \mathcal{C} sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent¹ car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{E}}) \subset \{0_{\mathcal{E}}\}$ Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}, \ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{E}}) = \{0_{\mathcal{E}}\}$
- (b) On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\ker(T) = \{0_{\mathcal{E}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, T est injectif.
- (c) — Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{E}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante. Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{E}})$. Ainsi $\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{E}})$ est l'ensemble des suites constantes.
- Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{E}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle. Ainsi $\ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{E}}) = \{0_{\mathcal{E}}\}$.

◆ Exercice 3 (PC 2022)

1. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a $\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive), donc

$$|u_n| = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

De plus pour $t \in [0; \pi/2]$, on a $\cos(t) \in [0; 1]$ donc $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$.
Ainsi par croissance de l'intégrale, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

- (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$, et $(|u_n|)$ est une suite positive, décroissante et qui tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.
2. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, donc $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.
Appliquée à $\theta = t/2$, cette égalité donne : $\cos^2(t/2) = \frac{1 + \cos(t)}{2}$.
- (b)]En se rappelant qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est $x \mapsto \tan(x)$, on a :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos^2(t/2)} dt = \frac{1}{2} [2 \tan(t/2)]_0^{\pi/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties (sur des fonctions \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi/2]$), on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt \\ &= \left[\sin(t) \cos^{n+1}(t) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1) \sin(t) \cos^n(t) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Le crochet est nul car $\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$, et avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$ on obtient donc

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)) dt \\ &= (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|) \quad (\text{linéarité de l'intégrale}), \end{aligned}$$

et finalement en isolant $|u_{n+2}|$ on obtient $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n|$.

- (b) Montrons par récurrence double, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : |u_n| \geq \frac{1}{n+1}.$$

— $|u_0| = \frac{\pi}{2} \geq 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— $|u_1| = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = 1 \geq \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, alors

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2} |u_n| \geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \quad (\text{par hyp. de réc.})$$

$$\text{Donc } |u_{n+2}| \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}.$$

D'où la conclusion voulue par récurrence.

- (c) Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

4. (a) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=0}^N |v_n(t)| = \frac{1 - \cos(t)^{N+1}}{1 - \cos(t)} \leq \frac{1}{1 - \cos(t)}$$

car $0 < \cos(t) < 1$, d'où le résultat par majoration des sommes partielles d'une STP.

- (b) On obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos^n(t) \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt = 1.$$

◆ Exercice 4 (MP 2022)

1. Questions de cours

- (a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Par théorème de convergence des sommes de

Riemann, $\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge vers** $\int_a^b f(t) dt$

- (b) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : t \in [0, 1] \mapsto t^m$. f est continue sur $[0, 1]$ donc d'après le résultat

précédent, $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f(t) dt$ i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{n}^m = \int_0^1 t^m dt = \frac{1}{m+1}$$

- (c) Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
2. Les valeurs possibles pour X_n sont tous les entiers entre 1 et n : $J = \llbracket 1, n \rrbracket$
3. Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note Y_i la variable aléatoire donnant la valeur de la boule tirée dans l'urne numéro i . Par définition de X_n , on a $X_n = \max_{1 \leq i \leq k} Y_i$.

Soit alors $j \in J = \llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $(X_n \leq j)$ est : $(X_n \leq j) = \bigcap_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} (Y_i \leq j)$. Ainsi

comme les tirages sont indépendants et donc les Y_i sont mutuellement indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(X_n \leq j) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(Y_i \leq j). \text{ Or } \mathbb{P}(Y_i \leq j) = \frac{j}{n} \text{ car } Y_i \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, n \rrbracket.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(X_n \leq j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

Pour $j \geq 2$, on a $(X_n = j) = (X_n \leq j) \setminus (X_n \leq j-1)$, donc :

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n \leq j) - \mathbb{P}(X_n \leq j-1) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}.$$

On remarque que cette expression est également valable pour $j = 1$

4. On a d'abord $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k)$. D'autre part, comme X_n est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n \in \llbracket j+1, n \rrbracket) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_n = k).$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)$$

5. Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les événements $(X_n > j)$ et $(X_n \leq j)$ forment un système complet d'événements. Ainsi $\mathbb{P}(X_n > j) = 1 - \mathbb{P}(X_n \leq j) = 1 - \frac{j^k}{n^k}$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j^k}{n^k}\right) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k : \mathbb{E}(X_n) = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k\right).$$

Or on a vu dans la seconde question de cours que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k = \frac{1}{k+1}$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^k\right) = \frac{k}{k+1} \text{ et donc } \mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$$

6. Si $k = 1$. On reprend la notation Y_i pour la variable aléatoire donnant le résultat du i -ième tirage. On a dans ce cas $X_n = Y_1$ qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on a alors $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ ce qui est bien cohérent avec l'expression trouvée dans la question précédente avec $k = 1$.

Remarque : on pouvait aussi constater que $\mathbb{E}(X_n) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^1 = n - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j = n - \frac{1}{n} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

◆ Exercice 5 (PC 2019)

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) \diamond Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \frac{1}{n+1+p} > 0$.

Donc la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

\diamond Or la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente. Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = +\infty$.

Or $s_p = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = +\infty$.

Ainsi la suite $(s_p)_{p \geq 1}$ diverge.

(b) Par définition comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} s_p = +\infty$,

$$\forall A > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0, s_p \geq A$$

En particulier pour un réel $A > 1$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq p_0, s_p \geq A > 1$.

Ainsi il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > 1$.

3. Par définition de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

4. \diamond Remarquons que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$.

Donc en sommant ces inégalités, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n}$.

En additionnant $\frac{1}{n}$ à cette inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1$.

\diamond

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3n-2-k} \quad \text{via } k \leftarrow n-2-k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

Or $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, a \neq b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$, car $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$.

Donc $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} > \frac{4}{4n-2}$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) > \frac{2(n-1)}{2n-1}$.

Donc $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > \frac{2(n-1)}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}$.

Finalement $\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$.

5. D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, $n-1 \leq p_n \leq 2n-2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n-1 \leq a_n \leq 3n-2$.

Alors en divisant par n ($n > 0$), $2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$.

Or la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Donc par passage à la limite $2 \leq \ell \leq 3$.

6. Soit $n \geq 0$.

Par définition de p_n , $1 < \sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k}$ et $\sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \leq 1$.

Donc $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leq 1$.

Ainsi $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$.

7. Soit n un entier non nul.

◇ Soit k un entier non nul.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

Donc $\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dx \leq \frac{1}{k}$.

Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,

$$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_n^{a_n} \frac{dx}{t} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

Ou encore

$$\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{a_n} \frac{dx}{t} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

◇ Or d'après la question précédente, $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.

Et $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leq 1$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{a_n} \frac{dx}{t} \leq \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leq 1$.

8. ◇ Remarquons que $\int_n^{a_n} \frac{dx}{t} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$.

Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq 1$.

◇ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.

Donc par encadrement, la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 1$.

Par continuité de la fonction exp en 1, La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e .